

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم – قسم الرياضيات

التحليل الدقيق لمنظومة ميكانيكية مستوية ، مع مرونة، مولدة بالآلة الرباعية

Accurate analysis of P.M.S , with super elastic hinges , generated by 4-bar mechanism

رسالة اعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

اعـــداد الطالـــب
مهند صالح العلوش

إشـــراف
الدكتور : مصطفى حسن

للعام الدراسـي
1432 - 1433
2011 - 2012

ملخص الرسالة

تقع الرسالة في اربعة فصول هي كما يلي :

الفصل الاول :

يضم الفصل الاول ثلاث فقرات:

- مقدمة تاريخية عن تطور علم الميكانيك بشكل عام ، وعن لآلة الرباعية وأين تستخدم .
- مقدمة حول ميكانيك المرونة واهميته.
- مقدمة حول المفاصل المرنة واهمية استخدامها.

الفصل الثاني :

نقدم في هذا الفصل دراسة التحليل الدقيق لآلات رباعية مستوية مع المرونة وحساب المصفوفات الثلاثة $\underline{I}$ و $\underline{\theta}$ و $\underline{\psi}$ وذلك للنماذج الثلاثة التالية:

- المنظومة المولدة بآلة رباعية وحيدة.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- المنظومة المولدة بآلتين رباعيتين .

الحالة الاولى: باستخدام وصلة ذات مفصل ثنائي الطرف:

$$\underline{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: بإستخدام وصلة أحادية الطرف:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- المنظومة المولدة بثلاث آلات رباعية.

الحالة الاولى: باستخدام وصلة ذات مفصل ثنائي الطرف:

$$\underline{I}=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1
\end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi}=\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&0&0&0&-1&1&0\\
0&0&0&0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&-1&1&0&0\\
0&0&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0\\
-1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi}=\begin{bmatrix}
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: بإستخدام وصلة أحادية الطرف:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث :

نناقش في هذا الفصل التحليل الدقيق للانزياح النسبي ، التحليل الدقيق لمنظومة مستوية مولدة بالآلة الرباعية بشكل كامل ، وحساب المصفوفات $\underline{J}$ ، $\underline{J}^*$ و $\underline{R} = -\underline{\Psi}^T \left(\underline{J} + \underline{J}^*\right)^T \underline{1}_{n+1}$ ونصف القطر المتجهي R_c للنقطة المميزة c لكل من :

- المنظومة المولدة بآلة رباعية وحيدة.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & c_{03} & 0 \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & 0 & -c_{24} \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + c_{01} - c_{11} \\ z_1 + z_2 + c_{01} + c_{12} - c_{11} - c_{22} \\ z_3 + c_{03} - c_{33} \end{bmatrix}$$

$$R_c = R_2 + r_3 e_1^{(2)}$$

- **المنظومة المولدة بآلتين رباعيتين .**

الحالة الاولى: باستخدام وصلة ذات مفصل ثنائي الطرف:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{08} & c_{09} & c_{0,10} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & -c_{38} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & -c_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & 0 & 0 & -c_{7,10} \end{bmatrix}$$

$$
\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & z_9 & z_{10} \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \end{bmatrix}
$$

$$
R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}
$$

الحالة الثانية: بإستخدام وصلة أحادية الطرف:

$$
\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{07} & c_{08} & c_{09} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & -c_{37} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & -c_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & 0 & 0 & -c_{69} \end{bmatrix}
$$

$$
\underline{J}^{*}=\begin{bmatrix}
z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & z_8 & z_9\\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_1\\ R_2\\ R_3\\ R_4\\ R_5\\ R_6 \end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
c_{01} - c_{11} + z_1\\
\sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i}\\
\sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i}\\
\sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i}\\
\sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i}\\
\sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i}
\end{bmatrix}
$$

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

- المنظومة المولدة بثلاث آلات رباعية.

الحالة الاولى: باستخدام وصلة ذات مفصل ثنائي الطرف:

$$
\underline{J}=\begin{bmatrix}
c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,12} & c_{0,13} & c_{0,14} & c_{0,15} & c_{0,16}\\
-c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{3,12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{5,13} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & c_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{7,14} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{88} & c_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{99} & c_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{9,15} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{10,10} & c_{10,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{11,16}
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{J}^* = \begin{bmatrix}
z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
c_{01} - c_{11} + z_1 \\
\sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{8} z_i - \sum_{i=1}^{8} c_{ii} + \sum_{i=1}^{8} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{9} z_i - \sum_{i=1}^{9} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{10} z_i - \sum_{i=1}^{10} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} + c_{1.10} \\
\sum_{i=1}^{11} z_i - \sum_{i=1}^{11} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} + c_{1.10} + c_{10.11}
\end{bmatrix}
$$

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

الحالة الثانية: بإستخدام وصلة أحادية الطرف:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,10} & c_{0,11} & c_{0,12} & c_{0,13} & c_{0,14} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{3,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{4,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{6,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & c_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{7,13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{88} & c_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{9,14} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{8} z_i - \sum_{i=1}^{8} c_{ii} + \sum_{i=1}^{8} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{9} z_i - \sum_{i=1}^{9} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} \end{bmatrix}$$

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

الفصل الرابع :

نركز اهتمامنا في هذا الفصل على ايجاد معادلات القيود لمنظومة مستوية مولدة بالآلة الرباعية وحساب عدد الوسطاء المستقلة الكافية لوصف الحركة وحساب العلاقة $\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \underline{0}_{\hat{n}\times 1}$ لكل من :

- المنظومة المولدة بآلة رباعية وحيدة.

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix} = 0$$

أو :

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 - \Delta z_3 + \Delta z_4 = 0$$

- المنظومة المولدة بآلتين رباعيتين .

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \\ \Delta z_6 \\ \Delta z_7 \\ \Delta z_8 \\ \Delta z_9 \\ \Delta z_{10} \end{bmatrix} = 0$$

أو:

$$\Delta z_{10} - \Delta z_9 - \Delta z_7 - \Delta z_6 = 0$$

$$\Delta z_9 - \Delta z_8 - \Delta z_5 - \Delta z_4 = 0$$

$$\Delta z_8 - \Delta z_3 - \Delta z_2 - \Delta z_1 = 0$$

- المنظومة المولدة بثلاث آلات رباعية.

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \\ \Delta z_6 \\ \Delta z_7 \\ \Delta z_8 \\ \Delta z_9 \\ \Delta z_{10} \\ \Delta z_{11} \\ \Delta z_{12} \\ \Delta z_{13} \\ \Delta z_{14} \\ \Delta z_{15} \\ \Delta z_{16} \end{bmatrix} = 0$$

أو:

$$\Delta z_{16} - \Delta z_{15} - \Delta z_{11} - \Delta z_{10} = 0$$

$$\Delta z_{15} - \Delta z_{14} - \Delta z_{9} - \Delta z_{8} = 0$$

$$\Delta z_{14} - \Delta z_{13} - \Delta z_{7} - \Delta z_{6} = 0$$

$$\Delta z_{13} - \Delta z_{12} - \Delta z_{5} - \Delta z_{4} = 0$$

$$\Delta z_{12} - \Delta z_{3} - \Delta z_{2} - \Delta z_{1} = 0$$

حيث تبين أنه في كل الحالات يوجد وسيط مستقل وحيد وهو q_1 .

فهرس المحتويات

الفصل الأول

مــقــدمة

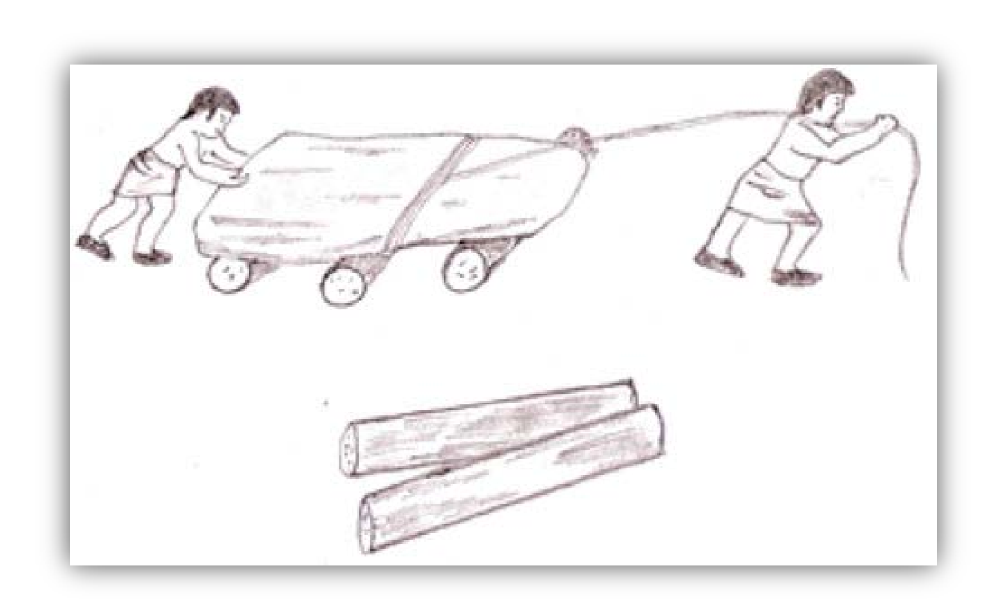
(الآلة الرباعية ، ميكانيك المرونة ، المفاصل المرنة)

1. مقدمة (الآلة الرباعية ، ميكانيك المرونة ، المفاصل المرنة)

1.1. الآلة الرباعية:

يختلف الانسان المعاصر اختلافاً بيناً في أسلوب حياته وفي ما لديه من امكانيات معيشية عن ذلك الذي عاش في الماضي السحيق. ولو أن فرداً من هذا الماضي شاهد عالمنا المعاصر لصعب عليه أن يصدق أن الانسان الحالي من ذريته وجنسه . فقد غير الانسان تغيراً جوهرياً في أسلوب حياته ووسائله المعيشية ، ولم يكتف بمجرد التأقلم لعوامل البيئة من حوله كباقي الكائنات الحية ، بل حاول دائماً أن يسيطر عليها ويخضعها له .

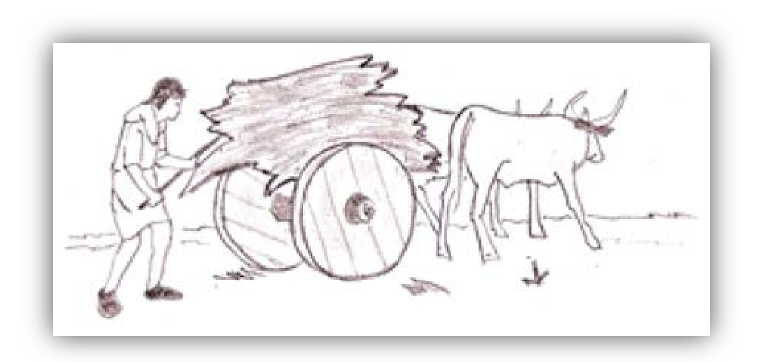
وارتبط ظهور علم الميكانيك، ارتباطاً وثيقاً، بحاجات الانسان اليومية والممارسات الحياتية ورغبة الانسان الجامحة للبحث عن الراحة وبذل اقل ما يمكن من العمل وبأعلى انتاج ممكن. ويكفي لتوضيح ذلك أن نستعرض الاشكال التالية [3] :



شكل (1-1-1): يشرح هذا الشكل كيف كان الانسان يجر الصخور قبل اختراع العجلات الخشبية.



شكل (2-1-1): عجلة خشبية قديمة.



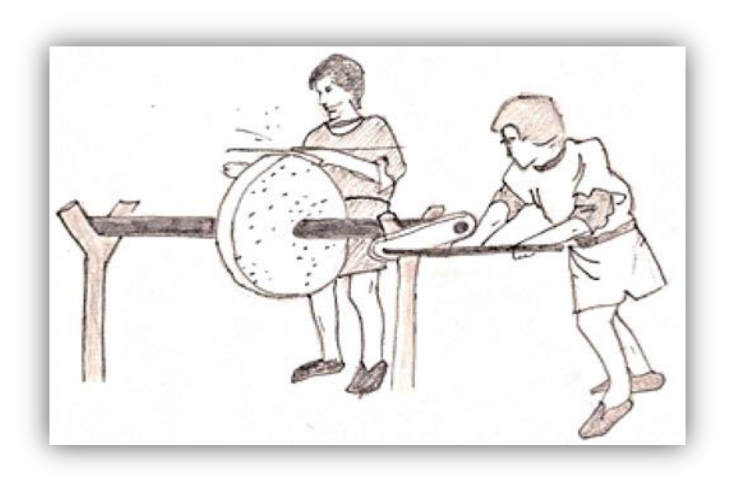
شكل (3-1-1):

تطور طرق الجر بعد اختراع العجلات الخشبية واستخدام الحيوانات كمصدر للطاقة.

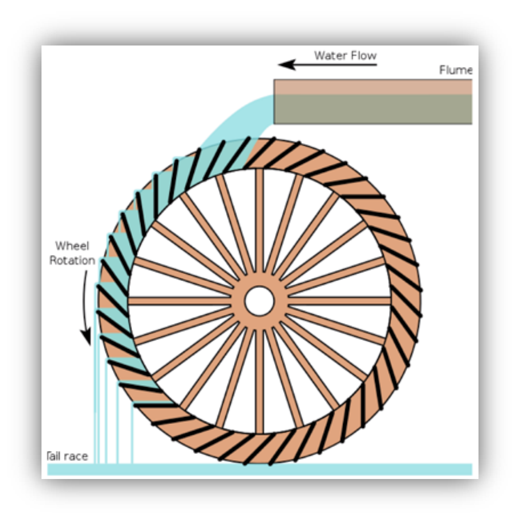


شكل (4-1-1):

شكل أخر من اشكال تطور العربات وبداية التفكير بعمليات النقل .



شكل (5-1-1): آلة تستخدم لشحذ الأدوات المعدنية .



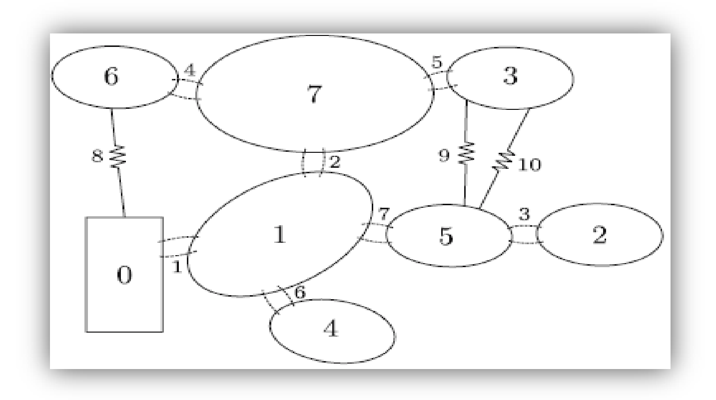
شكل (6-1-1): دولاب لتوليد الكهرباء باستخدام طاقة المياه.

وهذا قاد الانسان إلى التفكير ملياً بما حوله ، والبحث عن الاساليب التي تسهل له العيش ، وهذا كله أدى إلى تطور علم الميكانيك الذي كان يدعى علم الحيل .

ويقع موضوعنا في ما يسمى النظام متعدد الأجسام وهو مكون من أجسام صلبة (rigid bodies) و من وصلات (مفاصل) (joints) ، التي تربط الأجسام [5].

يتم ترميز الأجسام بالشكل $0,1,\dots,n$، بينما يتم ترقيم المفاصل بالأرقام $1,2,\dots,m$.

ففي الشكل التالي (7-1-1)، لدينا $n = 7 \;\&\; m = 10$.

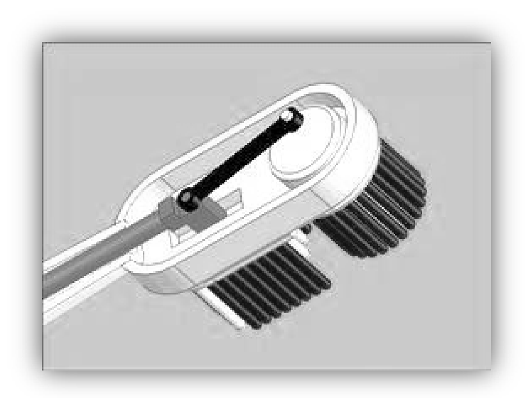


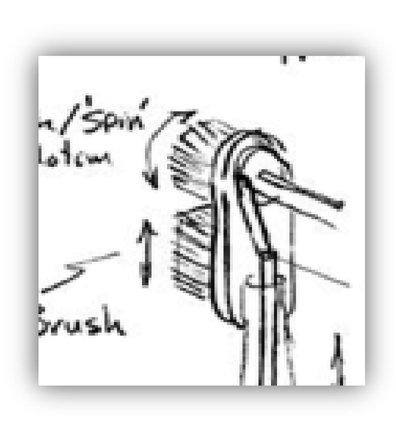
شكل (7–1–1): مثال توضيحي لنظام متعدد الأجسام.

و سنتحدث عن الآلة الرباعية تحديداً .

فالآلات الرباعية هي إحدى النظم الجزئية المستخدمة على نطاق واسع في تركيب الآلة. وبما أن مفهوم هذه الآلات قديم و مستخدم على نطاق واسع، فإن العديد من الباحثين تناول هذا الموضوع ، فلنستعرض بعض منها.

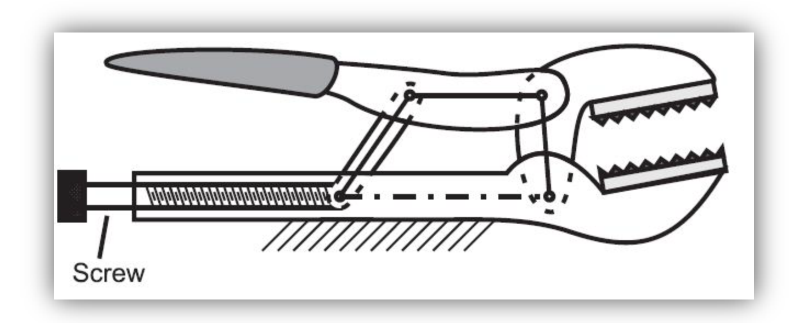
- ❖ تناول المهندس ليوناردو دافنشي الآلة الرباعية في احدى التصميمات لفرشاة الاسنان وهي الاداة الأكثر استخداماً في حياتنا اليومية حيث استخدم الآلة الرباعية لإنجاز دوران وانسحاب الشكل (8–1–1) .





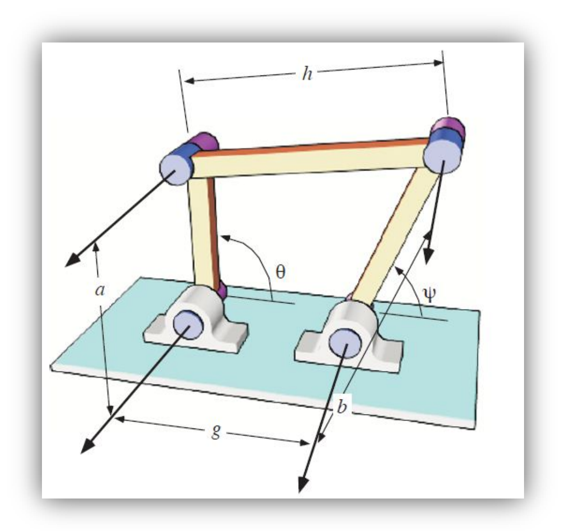
شكل (8–1–1): رسم توضيحي لفرشاة اسنان تعمل بالآلة الرباعية.

- ❖ وكذلك تعتبر الآلة الرباعية العمود الفقري في عمل الكماشة والتي هي من الادوات الاكثر استخداماً في حياتنا اليومية الشكل (9–1–1) [4].

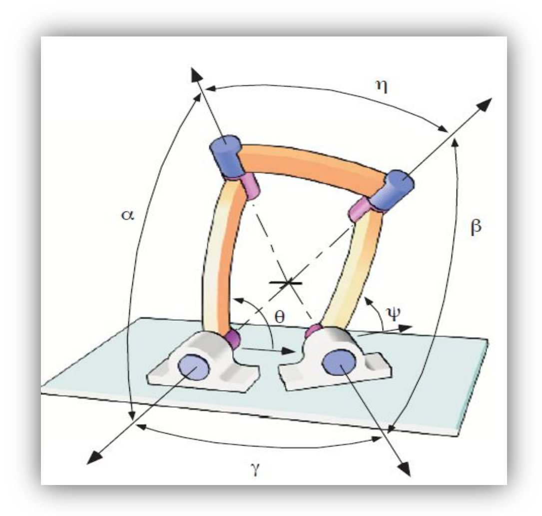


شكل (1-1-9): نموذج لكماشة تعمل بالآلة الرباعية.

❖ كما وتصنف الآلات الرباعية الى آلات رباعية مستوية الشكل (1-1-10)، وأخرى كروية الشكل (1-1-11) [4].

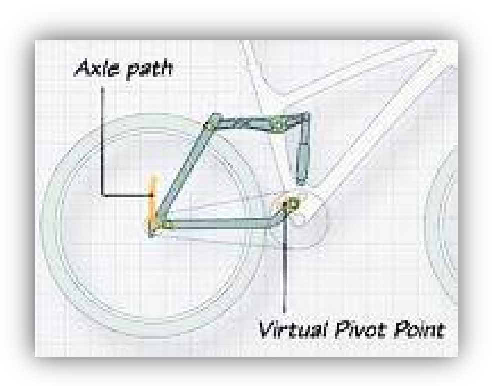


شكل (1-1-10): آلة رباعية مستوية.



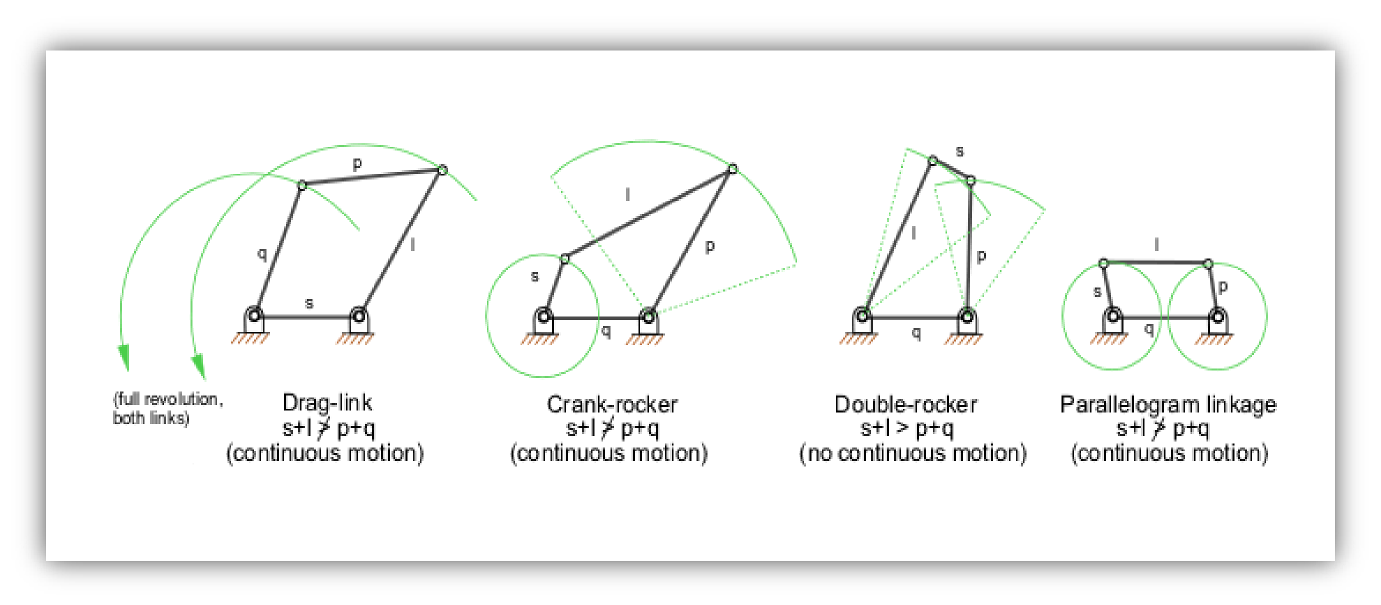
شكل (1-1-11): آلة رباعية كروية.

❖ وكما انه يتم استخدام الآلة الرباعية في هيكل الدراجة الهوائية الشكل (1-1-12).



شكل (1-1-12): آلة رباعية تستخدم في الدراجة الهوائية.

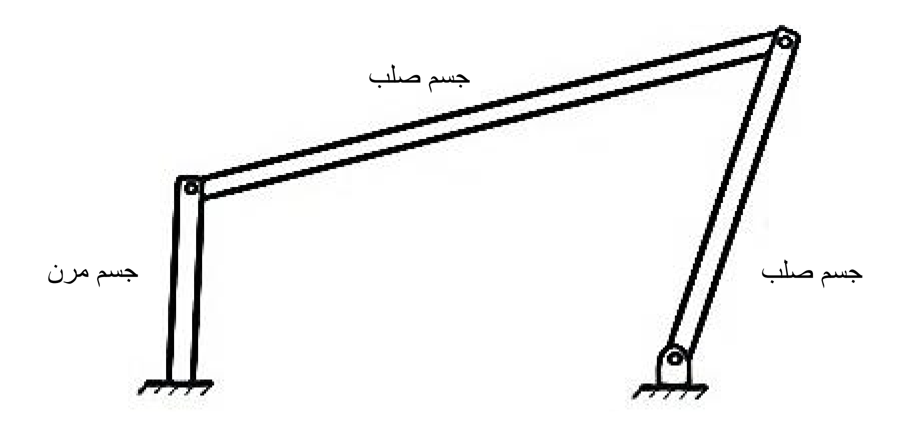
يُضاف الى ذلك العديد من الاستخدامات التي لا تحصى لهذه الآلة الهامة والتي لها اثراً كبيرا في حياتنا . وقد قام العديد من العلماء بتصنيف الآلات الرباعية الى عدة تصنيفات نذكر من اهم هذه التصنيفات تصنيف كرشوف (Grashof Classification) الشكل(1-1-13) [4].



شكل (1-1-13): تصنيف كراشوف للآلات الرباعية.

1.2. ميكانيك المرونة :

نرغب في وقتنا الحالي تقليل الإنفاق على إنتاج الآلات ومصاريف إصلاحها، فعند التقليل من مصاريف الإنتاج والإصلاح غالباً ما نلجأ للتخلص من الأجزاء غير الضرورية، وهذا أمر نموذجي في مجال التقنية والكثير من المجالات الأخرى .ولكن عندما ننتزع الأجزاء غير الضرورية فإن الجسم الناتج صلباً تماماً بل ستظهر عليه صفات الأجسام المرنة ولهذا لا يمكن استخدام الميكانيك التقليدي للحصول على التحليل المطلوب للحركة الناتجة لأن الميكانيك التقليدي يعتبر الجسم صلباً تماماً (الشكل 1-2-1).

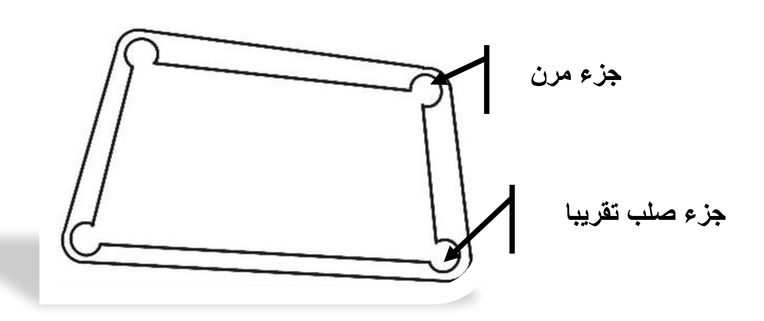


الشكل (1-2-1).

والحالة المثالية لهذه الحالة قد تظهر في المجموعات الميكانيكية ذات الأجزاء الدقيقة والتي تخضع في عصرنا الرهن لتطور سريع ومستمر، ولها تطبيقات لا تحصى مدنية وعسكرية مثل الرجل الآلي ، أجهزة توجيه الصواريخ ، كاميرات عالية الدقة ، القلب الصناعي ، أجهزة الطي .... و الكثير من التطبيقات الأخرى .

إن صعوبة تزييت الآلة الصغيرة " للحد من تأثير الاحتكاك الدائم بين الأجسام " والذي لا يمكن تجاوزه أو من الصعب جداً تحقيقه نظراً لصغر أجزاء الآلة ، دفع المصممين للتوجه نحو بناء الآلة كجسم واحد فتتحرك كجسم واحد . و هذا يتحقق من خلال حقن مادة مرنة بين تلك الأجسام (شكل 2-2-1) .

إن الحركة النسبية بين أي جسمين تنجز بفضل المادة المرنة الواصلة والرابطة لهذين الجسمين ، وهذا يقودنا للحديث عن المفاصل المرنة [7].

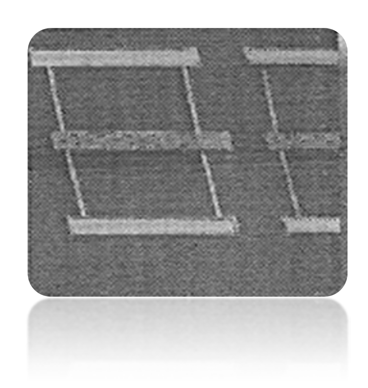


شكل (2-2-1).

وبهذا الشكل فإن الآلات ذات القياسات الدقيقة تتميز عن الآلات التقليدية ، بأنها تُصنّع لكي تكون طويلة الأمد ولكن ليس بالضرورة أن تكون هذه الآلات صلبة – بل مرنة .

وإن استخدام هذه الآلات يغنينا عن الصيانة والتزييت الأشكال (3-2-1)، (4-2-1) و (5-2-1).

ونجني الكثير من الفوائد عند تحقيق دوران الآلة بواسطة مفصل مرن بالمقارنة مع نظيراتها الكلاسيكية ، ومن هذه الفوائد مثلاً : انعدام الاحتكاك ، التحرك كجسم واحد ، إمكانية استخدامها في التطبيقات التي تتطلب قياسات صغيرة ، سهولة التصنيع وعدم الحاجة إلى الصيانة [7] .



شكل (3-2-1): (مقياس حرارة مائي مرن)



شكل (4−2−1): (رابط دقيق مرن)



شكل (5−2−1): (آلة رسم الخرائط المرنة)

إن الطبيعة تستفيد من مرونة الأشياء بشكل واسع ، لتحقيق حركات دورانية في الأنظمة الدقيقة للكائنات الدقيقة والتي على أساسها بنيت الآلات ذات الأجزاء الدقيقة . يُلاحظ في سيرة الطبيعة أن ما يقارب التسعين بالمئة من الكائنات الحية بدون عمود فقري وهذه النسبة تزداد كلما اتجهنا باتجاه الأحياء ذات الحجوم الصغيرة إلى أن نصل إلى الأحياء الدقيقة [7] . كما أنه توجد غالباً ، فلسفة مختلفة بين الطبيعة والانسان للبناء والتركيب الميكانيكي . فيكون من المحبب في النشاط الانساني ، استخدام الأجسام الصلبة لأنها تعني قوة التحمل . فتُصمم التراكيب بحيث تتحرك كمجموعة أجسام صلبة وتُربط لإنجاز حركة معينة كما هو الحال في مفاصل الأبواب . لكن الصلابة وقوة التحمل لا يمكن أن يكونا مفهومين متطابقين دائماً.

فالصلابة تعني مقدار التحمل قبل التشوه .

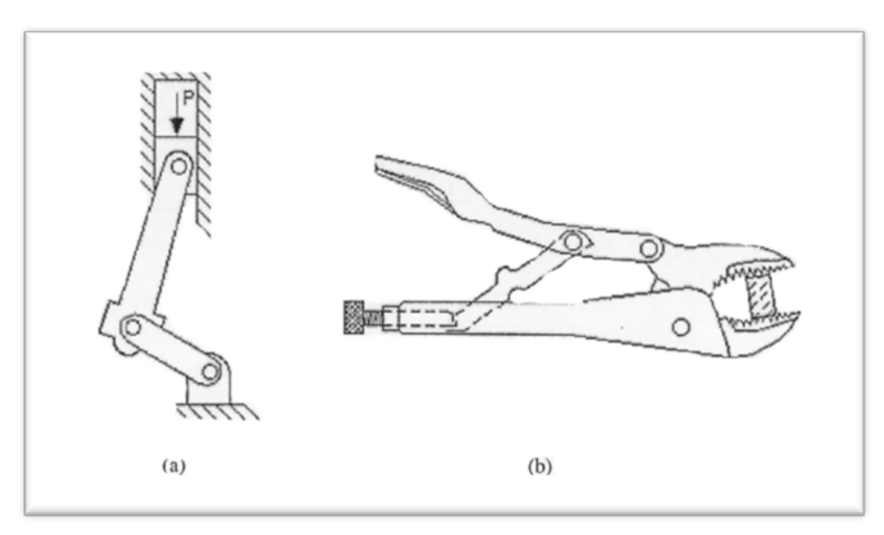
وقوة التحمل : تعني كمية حجم الأحمال المطبقة التي يتحملها التصميم قبل أن يتوقف عن العمل (التلف) .

في الحقيقة ، يمكن للقوة البشرية أن تصمم آلات مرنة وطويلة الأمد (متينة البناء)، إلا أنَّ الطبيعة قد تستخدم أجزاءً صلبة في حالة اللزوم مثل الأظافر ، جذوع الأشجار ، الأسنان ،..... ولكن في حالة الأجزاء الحية (الأنظمة الحية) ، تعتمد الطبيعة اعتمادا كبيراً على المرونة كما هو الحال في أجنحة الطيور ، أغصان و أوراق الأشجار ، الأسماك وأحياء وحيدة الخلية وغيرها الكثير...... .

إن التناقض بين المفهومين البشري والطبيعي في تصميم الآلات ، غالباً ما يظهر عندما يحاول الإنسان تبديل جزء حي بجزء صناعي . فمثلاً يستطيع القلب الصناعي المرن أن ينجز بدون توقف مليارات من الدورات . ويدخل في تركيب القلوب الصناعية المعاصرة عدداً كبيراً من الأجزاء الصلبة التي ترتبط بمفاصل دورانية لإنجاز الدورات اللازمة . ولكنَّ هذه القلوب ذات حياة قصيرة نسبياً وتسبب اضطرابات في انسياب الدم ، و التي غالباً ما تخرب الخلايا الدموية . هذا مع الإقرار أن الصلابة تعد ضرورية جداً للعديد من الأنظمة الميكانيكية . فمن غير المنطقي أن يكون سطح الأرض مرن أو طري أو أن ترى البيوت تتدلى تحت هبات الريح .وهنا لابد من الإقرار أيضاً بأن الطبيعة تعلمنا الكثير مما يمكن تطبيقه في عالم الصناعة لنحصل على تصميم طويل الأمد و بتراكيب مشابهة لما تستخدمهُ الطبيعة ، وسيلتنا للوصول إلى هذا الهدف هو ميكانيك المرونة[7].

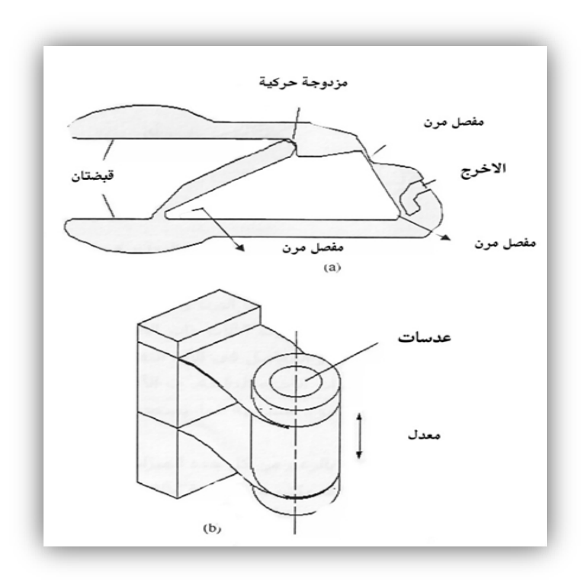
إن من المسلم به لدى بني آدم أن أي آلة هي تصميم يستخدم لإنجاز حركة ،أو انتاج قوة أو طاقة ، فالآلات التقليدية تتكون من أجسام صلبة ومرتبطة بمفاصل حركية . المثال المعروض في الشكل (1-2-6-a) جزء من محرك ذو احتراق داخلي .و المثال الآخر الشكل (1-2-6-b) هو الكماشة ، هذه الآلة تعطي الطاقة من المدخل وباتجاه المخرج . وبما أن الطاقة محفوظة (بإهمال الطاقة الضائعة من الاحتكاك) فقوى الإخراج يمكن أن تكون أكثر بكثير من قوى الإدخال ولكن الانزياحات في المخرج أقل من الانزياحات في الإدخال " المبدأ الذهبي في الميكانيك " : ما يفقد في الطريق يكسب في القوة والعكس .

يمكن أيضاً أن يوجد تراكيب من أجسام صلبة مرتبطة بمفاصل ، ولكن دون وجود أي حركة نسبية ما بين الأجسام (بإيجاد وصلات إضافية في الآلة). و القوى المؤثرة في المفصل لا يمكن أن تنجز أي عمل في مثل هذه التركيبات .



شكل (6−2−1).

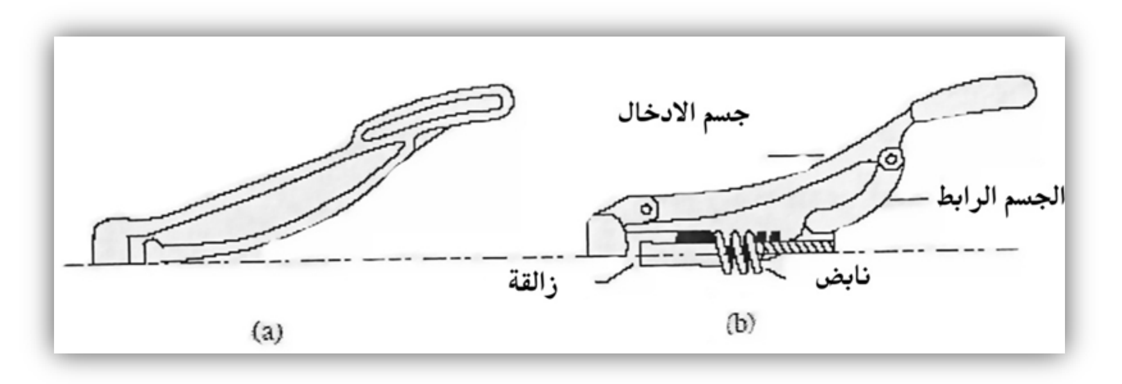
إن الآلات المرنة تنقل أو تعطي حركة ، كما هو الحال في الآلات التقليدية ، ولكن ما تختلف به الأجسام المرنة عن نظيرتها ، هو أنها تؤمن الحركة جزئياً أو كلياً اعتماداً على مرونة أجزئها المرنة ، وليس فقط اعتماداً على المزدوجات الحركية التقليدية . حيث ظهر في الشكل (a−7−2−1) ، آلة بأجزاء مرنة ، مناظرة لكماشة الطي . و القوة المعطاة هي باتجاه المخرج كما في التقليدية ، ولكن يوجد هنا احتفاظ ببعض الطاقة في الأجزاء المرنة. فلو كانت الآلة صلبة بالكامل لتحولت إلى تركيب فقط (غير فعال بمفرده). ويظهر في الشكل (b−7−2−1) ، جهاز يُستخدم لتعديل العدسات وهو أيضاً يتطلب أجساماً مرنة ، حتى يتمكن من إتمام وظيفته .



شكل (7−2−1).

يمكن إجمال فوائد الآلات المرنة في إطارين: تقليل المصاريف (أجزاء أقل ، وقت أقل لإنجاز التصميم ، سهولة التصميم) وتحسين الإنجاز (أكثر دقة، مجال أوسع للتحسين والتطوير ، وزن أقل ، اهتزازات أقل وهذا يعني طول الأمد وسهولة الصيانة).

إن أكثر ما يميز هذه الآلات هو أنها تنجز العمل نفسه بأقل عدد من الأجزاء ، وهذا ما يجعل استخدامها يزاد يوماً بعد يوم [7]. ويمكن إيضاح ذلك من خلال المثال (8−2−1) . وهو آلة كسر البندق التقليدية هي (b−8−2−1) والمرنة (a−8−2−1). فالآلة المرنة تحوي مفاصل دورانية و انسحابية ويمكنها القيام بالحركة النسبية ، وهذا ما يتيح اهتراء أقل و الاستغناء عن التزييت . تعتبر هذه الميزات ذات أهمية خاصة عند التطبيق وخاصة أن الآلة غالباً ما تكون في وسط يعرضها للاهتراء السريع (عوامل الطقس و ما شابه) . إن تقليل عدد الأجزاء يمكن أن يزيد في دقة الآلة لقلة أو انعدام ردود الأفعال العكسية ، ويعتبر هذا العامل في غاية الأهمية في أجهزة الدقة العالية [7].



شكل (8-2-1): يبين آلة كسر البندق المرنة ونظيرتها التقليدية على الترتيب .

ويمكن إضافة فائدة أخرى للآلات المرنة ألا وهي تخفيف الوزن والذي يقود في بعض الأحيان إلى تصغير حجم الآلة [7].

لقد تطورت الآلات ذات الأجزاء الصغيرة جداً خلال السنوات الأخيرة ، فمن ذلك تقليل عدد الأجزاء و المفاصل في الآلة التقليدية يعطيها صفة الآلة المرنة وهذا الشيء يؤثر إيجاباً في صناعة الآلات ذات الأجزاء الدقيقة .

إن الآلات ذات الأجزاء الدقيقة المرنة يمكن تصميمها باستخدام تقنيات ومواد مشابهةَ لما يستخدم في تصميم و إنتاج المخططات التكاملية .

يوجد بالطبع بعض المساوئ لهذه الآلات بالرغم من كل هذه الميزات ، فمثلاً صعوبة دراسة هذه الآلات ، فدراستها في بعض التطبيقات أعقد بكثير من دراسة الآلات التقليدية .

يوجد قبل كل شيء حركة إضافية ناتجة عن توفر المرونة في الأجزاء وكذلك فالطاقة غير محفوظة بين المدخل والمخرج ، بل إن الطاقة تختزن في الأجزاء المرنة .

وبالتالي يتطلب الأمر ربط بين فرعين من الميكانيك وهذا لا يعني فقط فهم كلا الفرعين ، بل التأثير المتبادل بينهما في مسألة على غاية من التعقيد .وفي الحالة التي تكون فيها التشوهات كبيرة ،فإن معادلة برنولي – أولر لم تعد صالحة في حالتها الخطية لقضيب مثبت من طرف واحد ، ولا يمكن استخدامها هنا وهذا ما يعقد مسألة الدراسة إلى حد كبير . فنحتاج استخدام المعادلات غير الخطية و هذا ناتج عن وجود التشوهات الكبيرة .

بالرغم من توفر الكثير من الأبحاث والدراسات في مجال الميكانيك اللاخطي ، إلا أنه يبقى الكثير من المسائل العالقة في هذا المجال حتى نتمكن من بناء نظرية متكاملة.

إن غياب الوصف الرياضي في الوقت الحالي يقود إلى اللجوء إلى التجارب (الطرق التجريبية) وطرق الأخطاء والذي يكلف الكثير وبإنتاج ضعيف نسبياً . ويبقى هذا الخيار فعّالاً فقط في الآلات البسيطة فالكلفة قليلة .

إن عملية البحث عن نظريات لتبسيط دراسة وتحليل هذه الآلات والبحث في كيفية تطبيق تلك النظريات في هذا المجال ،نشطت في السنوات الاخيرة.

سبق وقلنا أن امتصاص (اختزان) الطاقة في الأجزاء المرنة يمكن اعتباره سلبياً ، ولكن في الحقيقة يمكن أن يكون مفيداً في بعض الأحيان ، حيث يمكن استخدامه لتبسيط الآلات التي تحوي نوابض و للحصول على علاقات خاصة (تشوه – قوة وحفظ الطاقة)، الذي يتم استخدامه ونقله من قبل الآلة المعتبرة [7]. ويكون هذا العامل (اختزان الطاقة) سلبياً في بعض الحالات عندما تكون مهمة الآلة هو إيصال الطاقة من المدخل إلى المخرج ، فهنا لا يتم نقل الطاقة بكاملها ، بل يحفظ جزء منها ضمن الآلة .

ويمكن إضافة سلبية أخرى للمفاصل المرنة ، وهي أنَّه لا يمكنها القيام بدوران مستمر ، بينما هذا الأمر متوفر في المفاصل التقليدية .

تتفوق الآلات المرنة على التقليدية المناظرة في التطبيقات ، التي تتطلب بساطة في التحضير ، اقتصاد في المادة ، قياسات بالميكرو والنانو ، جعل الحركة أكثر انسيابية ومستقرة من ناحية الاهتزاز . وبالرغم من هذه الميزات المدهشة لهذه الآلات ، فلا زالت أقل استخداماً من نظيرتها التقليدية . ويمكن إرجاع ذلك : إلى تأمين مواد التصنيع والتقنيات التي تتيح تشوه كبير ، وفي نفس الوقت تؤمن المتانة اللازمة ، كذلك غياب الطرق الرياضية التي تعالج المسألة بشكل متكامل .

لقد تم التوجه لحل هذه المسألة منذ / 21 / عاماً ، حيث أجريت الكثير من الأبحاث من أجل ذلك . والسبب في ذلك ، هو تزايد أهمية هذه الآلات في مجال التقنية ذات الأنظمة الميكروية والنانونية.

وإن ظهور مواد أفضل ، وتقنيات تصنيع جديدة ، وتطور طرق الإسقاط و الحاجة الملحة علمياً و تقنياً ، قد وسع إطار تطبيقات هذه المواد بعض الشيء.
وبشكل عام لهذه الآلات ثلاث أنواع في المراجع العلمية وهي :

1. آلات مرنة مرتكزة على المفاصل المرنة .
2. آلات مرنة مرتكزة على الأجسام المرنة .
3. آلات مرنة بشكل كامل (بدون اجزاء صلبة) .

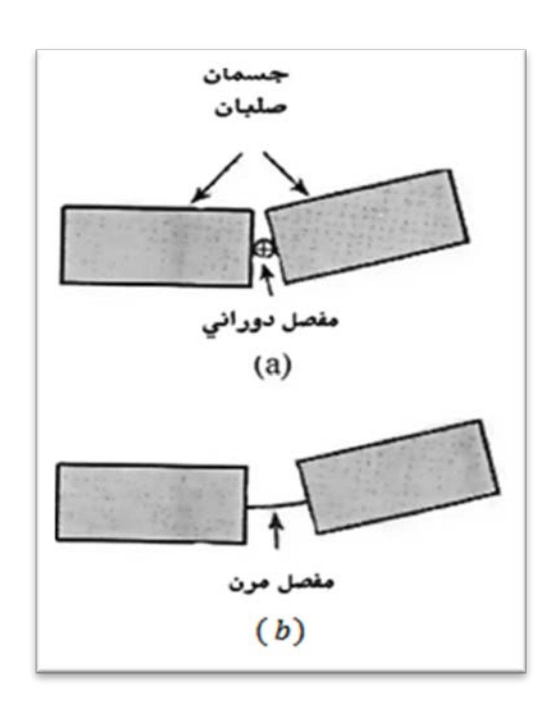
ونركز في هذه الإطروحة على النوع الأول ألا وهو مجموعة أجسام صلبة و مرتبطة فيما بينها بمفاصل مرنة.

1.3. المفاصل المرنة:

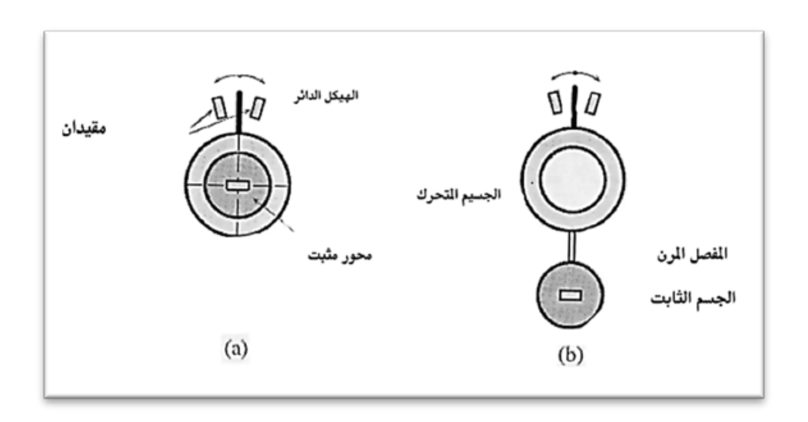
تعتبر هذه المفاصل المرنة أجزاء أساسية في الآلة المرنة .والمفصل المرن أو المحور المرن للدوران (المركز المرن للدوران في الحركة المستوية) ،بالتعريف هو جزء مرن بقياسات صغيرة بين جسمين صلبين ، و الذي يتيح للجسمين القيام بحركة دورانية نسبية محدودة ضمن آلة معينة ، وتوفر وسط (مرن) واحد على الأقل ضمن آلة ما تصبح من الأنماط الثلاثة أعلاه .

إن المفصل المرن حين تعرضه لأحمال خارجية أو قوى محركة (أو الاثنين معاً) ، فإنه ينضغط و يتعرض لتشوه مؤقت وهذا بدوره يؤدي إلى دوران نسبي للأجسام المجاورة والمربوطة من خلاله . ولهذا يمكن النظر للمفصل المرن على أنه جسم رقيق يؤمن دوراناً نسبياً للجسمين ،اللذين يربط بينهما، من خلال عملية التشوه المؤقتة التي يتعرض لها هذا المفصل الشكل (1–3–1). والذي يبين الفرق بين المفصل المرن ونظيره التقليدي الدوراني .

وينظر للمفصل المرن على أنه حيز مرن يسمح بمدى محدود للدوران . وهذا مبين في الشكل (2–3–1). [7] .



شكل (1–3–1) : مفصلان يتيحان دوران نسبي في الآلة : فالأول تقليدي والثاني مرن.

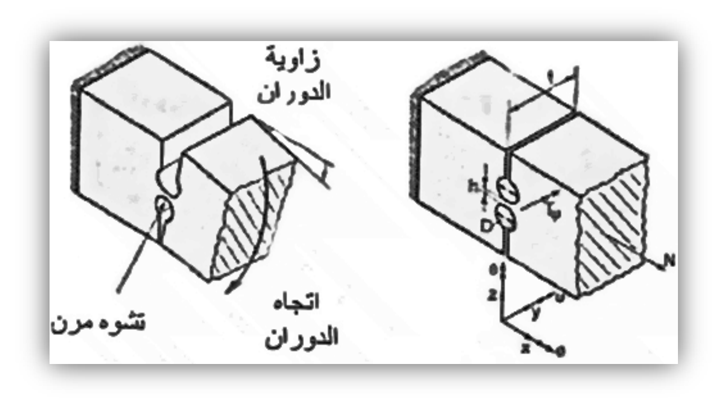


شكل (2−3−1): مقاربة وظيفية بين المفصلين التقليدي والمرن ، فالأول يتطلب تراكيب اضافية لإتمام الدوران بينما المرن ينجز الدوران بدون ذلك (كما هو موضح).

يتم الدوران النسبي في حالة المفصل الدوراني التقليدي بين المحور وهيكل الحيز ، أي يتم ذلك في قطاع زاوي محدد بمساعدة الوصلات المستوية الشكل (a−2−3−1) .

يمكن للمفصل المرن أن يؤمن دوران كهذا ، ولكن مركز الجسمين اللذين يصل بينهما المفصل المرن و يقومان بالدوران النسبي ، ليسا مرتبطان الآن ، كما هو موضح في الجزأ الثاني من الشكل (2−3−1).

يوفر المفصل المرن ، كما ذكرنا خلال تشوهه دوران نسبي محدود في الآلة موجه ليؤدي مهمة معينة . فيستخدم المفصل المرن ، ليضيف درجة حرية دورانية محلية في الآلة . إن هذا الدوران هو ناتج التشوه المحلي المرن ، كما هو مبين في الشكل (3−3−1).



شكل (3−3−1).

إن المفصل المرن وللعديد من التطبيقات هو واحد من كل ضمن الآلة وهذا أساس ميزاته الإيجابية أمام المفصل التقليدي .

يمكن ايجاز أبرز الميزات و الفوائد لهذا المفصل كما يلي [7] :

1. إنعدام الاحتكاك .
2. إنعدام ردود الفعل الانعكاسية .
3. إنعدام الفراغات بين المحور وحجرة الدوران .
4. المتانة وخفة الوزن .
5. المقدرة على استخدامها في التطبيقات التي تتطلب قياسات صغيرة للأجسام .
6. سهلة التصنيع .
7. لا حاجة للصيانة إطلاقاً.
8. دقة عالية .

وتستخدم المفاصل المرنة في الأجهزة الدقيقة كساعات الحائط واليد لمئات من السنين .

وتعطي المفاصل المرنة ميزات مثيرة أمام التقليدية من حيث سهولة التصنيع ، وكذلك ميزاتهم التطبيقية . فالمفاصل التقليدية ذات دقة أقل وذلك بسبب قصر أمدهم وقلة قدرة التحمل .

إلا أن المفاصل المرنة تصنَّع بسهولة ويتم تصميمها بسلسلة بسيطة من العمليات ، أما من ناحية الصيانة ، فلا تحتاج هذه المفاصل للتزييت ولا وجود للاحتكاك فيها وبالتالي للتآكل .

تولد هذه المفاصل حركة انسيابية مستمرة وبشكل أملس وبدون أي ردود فعل عكسية ، من خلال إختيار مناسب لمادة التصنيع ، تخضع هذه المفاصل لمبدأ قوة – انتقال.

إن هذه الميزات تجعل من هذه المفاصل ذات مجال واسع من التطبيقات وخاصة في الأجهزة التي تتطلب دقة ميكروية ، بدءاً من الأجهزة البصرية وحتى الميكروية.

الآلات التي تتضمن مفاصل مرنة و التي تشكل معها جسماً واحداً تقوم بوظيفتها كما يجب إلا إذا خرجت عن التركيب (يخرج المفصل عن التركيب عند تطبيق أحمال زائدة).

بسبب تحميلها فوق طاقتها. وتحتاج الآلات التي تتضمن هذه المفاصل ، إلى اختبار قبل الاستعمال كنظيرتها التقليدية ولكن بشكل بسيط جداً حتى يتم حساب الانحراف (الإنزياح) عن الحالة المثالية الهندسية .

لا يتم الدوران هنا حول محور ثابت في كلا الجسمين وذلك بسبب التشوه الذي يصيب هذه المفاصل ، وهذا يعتبر من أكبر سلبيات هذه المفاصل أمام التقليدية المناظرة . فمركز الدوران في الآلات المستوية المرنة و الذي يعرف على أنه ، مركز التناظر للمفصل المرن ، لا يبقى ثابتاً بل ينزاح نتيجة للتشوه الذي يتعرض له تحت تأثير الأحمال المطبقة . إن هذا يقود إلى فروق في أوضاع الأجسام للآلة المرنة بالمقارنة مع أوضاع نفس الأجسام في الآلة بمفاصل دورانية تقليدية .



الفصل الثاني

الوصف المصفوفي للتأثير المتبادل بين منظومة أجسام مستوية مولدة بالآلة الرباعية

2. الوصف المصفوفي للتأثير المتبادل بين منظومة أجسام مستوية مولدة بالآلة الرباعية

2.1. مصفوفات التراكيب:

لتكن لدينا آلة مستوية ، تتكون من $(n+1)$ جسم ، ترتبط فيما بينها بـ m مفصل . نبدل كل مفصل دوراني بمفصل عالي المرونة وبهذا نحصل على آلة مرنة من النمط الأول . ولنحدد الآن الانزياح (الإنسحابي والدوراني) لجسم اختياري بالنسبة للجملة المستوية المطلقة مقارنة مع نفس الجسم من الآلة القديمة.

يوجد في الآلة جسمان : الجسم الثابت وجسم آخر يلعب دوراً خاصاً في الآلة وهو الذي يؤدي المهمة التي من اجلها صممت الآلة . نسمي الجسم الأخير بالجسم الخاص ، و نسمي الجسم الأول بالجسم الصفري ، ولنرمز للجسم الخاص بالرمز i^* .

تتحدد السلسلة الأساسية من الجسم الثابت والجسم الخاص في الآلة (قد يوجد أكثر من سلسلة أساسية في الآلة) . و تكون هذه السلسلة أحياناً محددة تلقائياً في بعض الآلات مثل الرجل الآلي وما شابه ، بينما في آلات أخرى فيوجد أكثر من إمكانية لإختيار السلسلة الأساسية .

لنعطي الارقام $1,2,\dots,i^*$ رموزا لأجسام السلسة الأساسية مبتدئين من الجسم المجاور للجسم الثابت . ولنمثل الآلة تمثيلاً تخطيطياً ، بحيث تكون رؤوسه $s_i(i=0,1,\dots,n)$ ترميزاً لأجسام الآلة ، أما $u_a\ (a=1,2,\dots,m)$ فهي ترميز الوصلات (المفاصل) .

نوضح ما نقصد بعملية الترقيم للأجسام والرؤوس ، وكذلك للوصلات والأضلاع ، من خلال النص التالي: يأخذ الضلع من السلسلة الأساسية ، والمتبوع برأس ذو رقم i ، نفس هذا الرقم $(i=1,2,\dots,i^*)$. و لا يملك مخطط الآلة الشكل الشجري، في الحالة العامة بل يحوي حلقات مغلقة (طرق مغلقة) ، ولكنه يقبل التحويل إلى شجري بحسب نظرية البيان (المخططات) بعد اقتطاع $\hat{n}=m-n$ ضلعا [8],[2]. و يشترط عدم اقتطاع أضلاعٍ من السلسلة الأساسية ، أثناء التحويل .

علماً أنه يربط بين أي رأسين في الشكل الشجري الناتج، سلسلة بسيطة واحدة فقط ، يستخدم فيها الرأس مرة واحدة فقط . ونستخدم هنا الترقيم النظامي ، حيث يتم الترقيم في كل سلسلة بسيطة ، بدءاً من الرأس s_0 بحيث يتشكل لدينا متتالية متزايدة بإطراد . كما ويمكن إجراء الترقيم بطريقة

أخرى ، فمثلاً يمكننا البدء من الأجسام الاخيرة وهنا يتشكل لدينا الترقيم $n, n-1$ وهكذا يتم الترقيم للأضلاع . كما تأخذ الأضلاع الهيكلية ، عند اختيار الترقيم النظامي ، الارقام من 1 وحتى n و يشترط أن يأخذ الضلع رقم الرأس الذي ينتهي فيه وأن يكون الضلع من نفس السلسلة البسيطة الحاوية على أضلاع هيكلية تربط s_0 بـ s_i . أما الأضلاع غير الهيكلية فتأخذ الأرقام من $n+1$ إلى m و ندعو السلسلة البسيطة التي تربط الرؤوس من الهيكل الشجري ، s_0 بـ s_i ، بالطرق المباشرة وسنرمز لها بـ $[\ s_0\ ,\ s_i\ ]$ [6].

يربط كل مفصل a جسمين فقط. ونعتبر أن الجسم الثابت في الحركة النسبية في المفصل a ، الجسم ذو الرقم الاقل . ونحصل بهذا الشكل على إمكانية تعريف تابعين $i^+(a)$ و $i^-(a)$ $(a = 1,2, \dots, m)$ ، حيث يعبر الأول عن رقم الجسم الثابت والثاني عن رقم الجسم المجاور (المتحرك) . وهذا يوضح أن هذا الترقيم يعطي $i^-(a) = a$ من أجل $(a = 1,2, \dots, n)$. إن تعريف التابعين السابقين يحول المخطط إلى مخطط موجه كتوجيه الأضلاع ، أي تتحول الأضلاع إلى أقواس من الرأس ذو الرقم الأصغر إلى الرأس ذو الرقم الأكبر أو من الرأس ذو الرقم $i^+(a)$ إلى الرأس ذو الرقم $i^-(a)$ ، أي أصبح لدينا مخطط موجه بـ $n+1$ رأساً و m قوساً .

و تسمى المصفوفة التالية $\underline{I} = (s_{ia})(i = 0,1, \dots, n; a = 1,2, \dots, m)$ ، بمصفوفة التتالي والتي تعرف بالشكل [2] ,[1]:

$$s_{ia} = \begin{cases} 1\ ; i = i^+(a) \\ -1\ ; i = i^-(a) \\ 0\ ; i \neq i^{\pm}(a) \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

فإذا كان s_i بداية الضلع u_a فإن $s_{ia} = 1$ ، وإذا كان ينتهي به فإن $s_{ia} = -1$ وإلا فإن $s_{ia} = 0$.

ستحوي مصفوفة التتالي في كل عمود ، بالضبط عنصر واحد قيمته $+1$ وأخر قيمته -1 ، وذلك لكون كل قوس يتحدد برأسين فقط. و تسمح هذه المصفوفة بأن يكون مخطط الجملة ، قابل للإصلاح وتصف البناء التركيبي للجملة .

لنعرف المصفوفة :

$$\underline{I}^+ = (s_{ia}^+) \qquad (i = 0,1, \dots, n; a = 1,2, \dots, m)$$

والتي تعرف بالشكل :

$$s_{ia}^+ = \begin{cases} 1 \,; i = i^+(a) \\ 0 \,; i \neq i^\pm(a) \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

وتنتج هذه المصفوفة مباشرة من مصفوفة التتالي بتبديل كل -1 بصفر .

لنكتب مصفوفة التتالي بالشكل :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{s}}_0 & \underline{\hat{s}}_0 \\ \underline{\breve{s}} & \underline{\hat{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{s}_0 \\ \underline{s} \end{bmatrix} \qquad (2.1.3)$$

حيث:

$\underline{\breve{s}}_0 = (s_{0a})(a = 1,2, \dots, n) \& \underline{\hat{s}}_0 = (s_{0a}) \quad ; \qquad (a = n+1, n+2, \dots, m)$

$\underline{\breve{s}} = (i, a = 1,2, \dots, n); \ \underline{\hat{s}} = (s_{ia}) \qquad (i = 1,2, \dots, n; a = n+1,2, \dots, m)$

$\underline{s}_0 = (s_{0a})(a = 1,2, \dots, m) \,; \ \underline{s} = (s_{ia}) \qquad (i = 1,2, \dots, n; a = 1,2, \dots, m)$

ليكن لدينا $\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \dots, \Phi_m$ جملة من $\hat{n}$ حلقة أساسية ، و كل حلقة تتعين من الأضلاع غير الهيكلية $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_m$.

و نختار اتجاه القوس u_{n+i}. كاتجاه موجب في الحلقات Φ_{n+i} .

ندعو المصفوفة ذات المرتبة $(\hat{n} \times m)$ التالية :

$$\underline{\Phi} = \left(\varphi_{n+i,b}\right) \quad ; \quad (i = 1, \dots, \hat{n}; b = 1, \dots, m)$$

مصفوفة الحلقات الأساسية ، حيث [1],[2]:

$$\varphi_{n+i,b} = \begin{cases} 1\,; u_b \epsilon\ \Phi_{n+i}\,, u_b\ \nearrow\nearrow u_{n+i} \\ -1\,; u_b \epsilon\ \Phi_{n+i}\,, u_b\ \nearrow\swarrow u_{n+i} \\ 0\,; u_b \notin\ \Phi_{n+i} \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

$$; (i = 1, \dots, \hat{n}; b = 1, \dots, m; \hat{n} = m - n)$$

الرمز ↗ ↗ يعني أن الضلعين u_b و u_{n+i} بنفس الاتجاه و↙ ↗ باتجاهين متعاكسين.

ولنعرف الأن مصفوفة الطرق المباشرة من خلال مفهوم الطرق المباشرة [$\mathcal{S}_0\ ,\ \mathcal{S}_i$] من الجسم $\mathcal{S}_0$ إلى الجسم $\mathcal{S}_i$ ، بالشكل :

$$\underline{\Psi} = (\psi_{ai}) \qquad ; (a = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n)$$

وحيث:

$$\psi_{ai} = \begin{cases} 1\,; u_a\ \epsilon[s_0, s_i], \longrightarrow\ s_0 \\ -1\,; u_a\ \epsilon[s_0, s_i], \longleftarrow\ s_0 \\ 0\,; u_a\ \notin [s_0, s_i] \end{cases} \qquad (2.1.5)$$

الرمز s_0 ⟶ يعني أن الضلع u_a يتجه نحو s_0 وs_0 ⟵ يعني أن u_a يتجه مبتعداً عن s_0 ، تملك هذه المصفوفة الشكل المبسط التالي وذلك بفضل إختيار الترقيم النظامي :

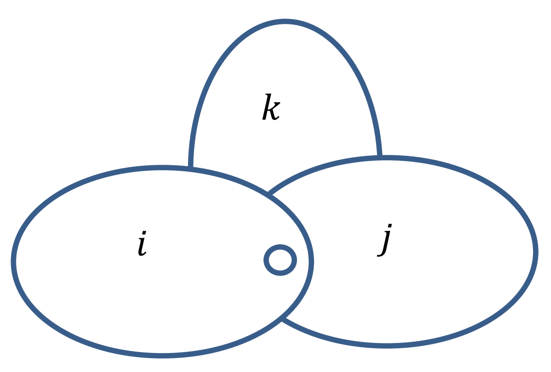
$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{0}_{\hat{n}\times n} \end{bmatrix}; \hat{n} = m - n, \underline{T} = \underline{\breve{S}}^{-1}, \underline{T} = (\tau_{ai}) \qquad (a, i = 1, \dots, n)$$

وسنرمز من الأن فصاعداً بـ $\underline{0}_{k\times s}$ بمصفوفة من المرتبة $k \times s$ ، والتي جميع عناصرها أصفاراً.

ولنعرف في الجسم i حيث $(i = 0,1, \dots, n)$ جملة إحداثية $O_i x_i y_i z_i$ كما يلي: نختار المحور z_i محوراً للدوران في الجسم ذو الرقم i بالنسبة للجسم ذو الرقم الأقل من نفس الوصلة ضمن الطريق المباشر من s_0 إلى s_i، جميع المحاور z_i ستكون متوازية وعمودية على مستوي الحركة .

وإذا كان الجسم i داخلياً في الشكل الشجري وهو مرتبط بأكثر من جسم وبأرقام $j, k, \dots, l$ حيث $(j < k < \cdots < l)$ ، فالمحور x_i نأخذه عموداً مشترك على z_i و z_j في مستوي الحركة ، وموجهاً باتجاه z_j . ويقطع المحور السيني هذين المحورين z_i و z_j في النقطتين O_i و O_j على الترتيب ، فالنقطة الأولى هي مبدأ الجملة $O_i x_i y_i z_i$ والتي يكون فيها المحور y_i في مستوي الحركة ويتمم المحورين x_i ، z_i إلى جملة يمينية متعامدة .

وهكذا تُعرف جميع الجمل الإحداثية في النقط $O_j, O_k, \dots, O_l$ ، المنتمية للأجسام المرتبطة بالجسم i ، ذات الأرقام $j < k < \cdots < l$ ، الشكل $(1 - 1 - 2{,}2 - 1 - 2)$.

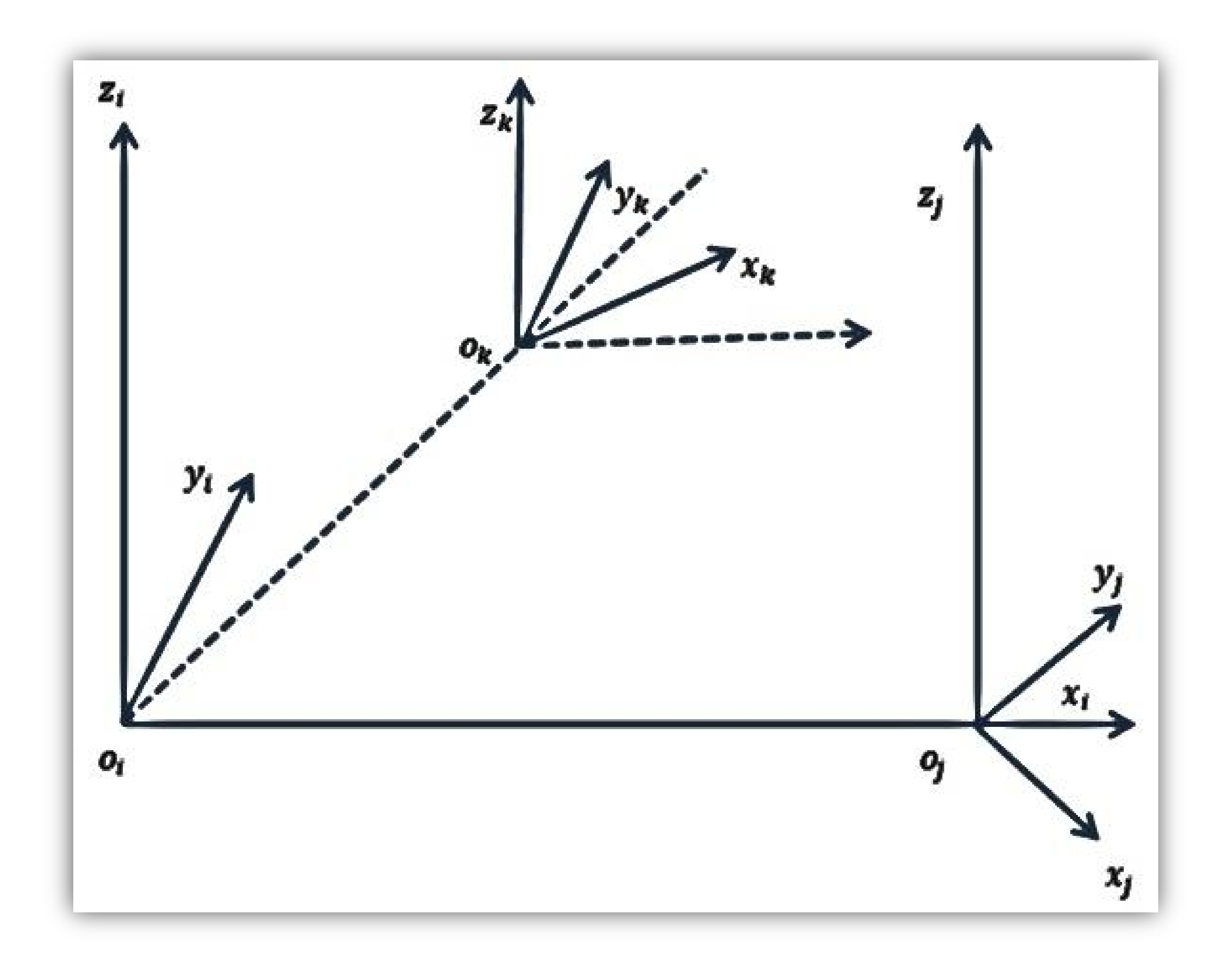


الشكل($1 - 1 - 2$).

ويتم اختيار المحورين x و y للجمل الإحداثية ، في الأجسام الحدودية غير الصفرية ، بشكل اختياري بشرط أن تتشكل جمل متعامدة يمينية وبمحور واحد للدوران z .

يتم الاختيار في الجسم الصفري (الثابت) بحيث يتطابق z_0 و z_1 والمحورين الباقين يتم اختيارهم بشكل اختياري .

و لنعرف الآن في كل جسم جملة إحداثية إضافية ، عدا الجسم الصفري ، مبدأ كل منها نقطة c_i من الجسم وبمحاور موازية لمتجهات الواحدة $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}$.



الشكل $(2-1-2)$

ولنختار في كل وصلة (مفصل) الجسم القاعدة و هو الجسم ذو الرقم الاصغر $i^{+}(a)$. يتعين موضع الجسم $i^{-}(a)$ بالنسبة للجسم $i^{+}(a)$ ، بالزاوية q_a بين محوري سينات الجملة $C_i\underline{e}^{(i)}$ أي ان $q_a = \angle(e_1^{i^{+}(a)}, e_1^{i^{-}(a)})$.

2.2. دراسة بعض الأمثلة التطبيقية وتطبق النتائـج السابقة عليها:

2.2.1.منظومة مولدة بآلة رباعية وحيدة:

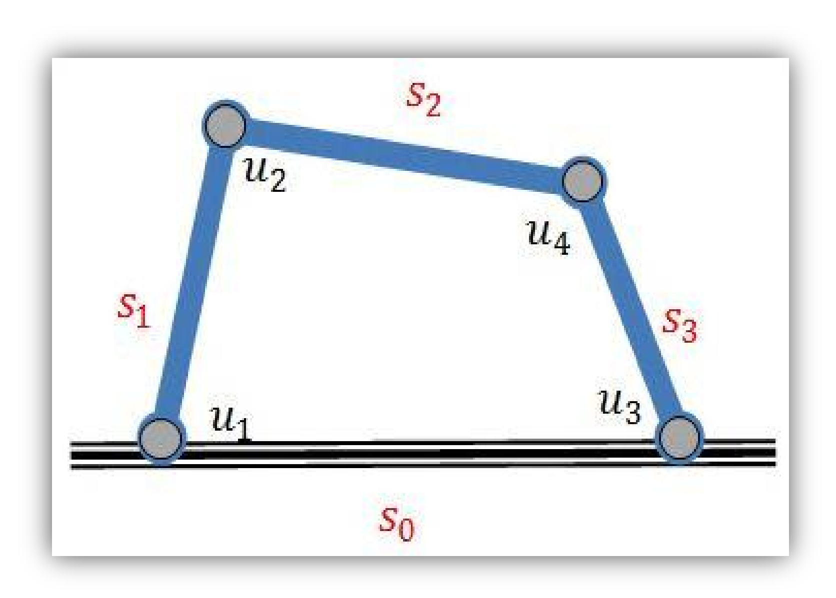
لندرس كمثال أول الآلة المولدة من آلة رباعية واحدة ، وهي الآلة الأبسط التي تحوي طريقاً مغلقاً واحداً والذي يملك الكثير من التطبيقات في مجال الصناعة ومختلف الأجهزة في مجال المحركات ، بالإضافة لاستخدامه في مجال ألعاب الأطفال وهكذا .

وتملك هذه الآلة أربعة أجزاء متمفصلة ولهذا تدعى بالآلة الرباعية ، كما هو موضح في الشكل $(2-2-1)$.

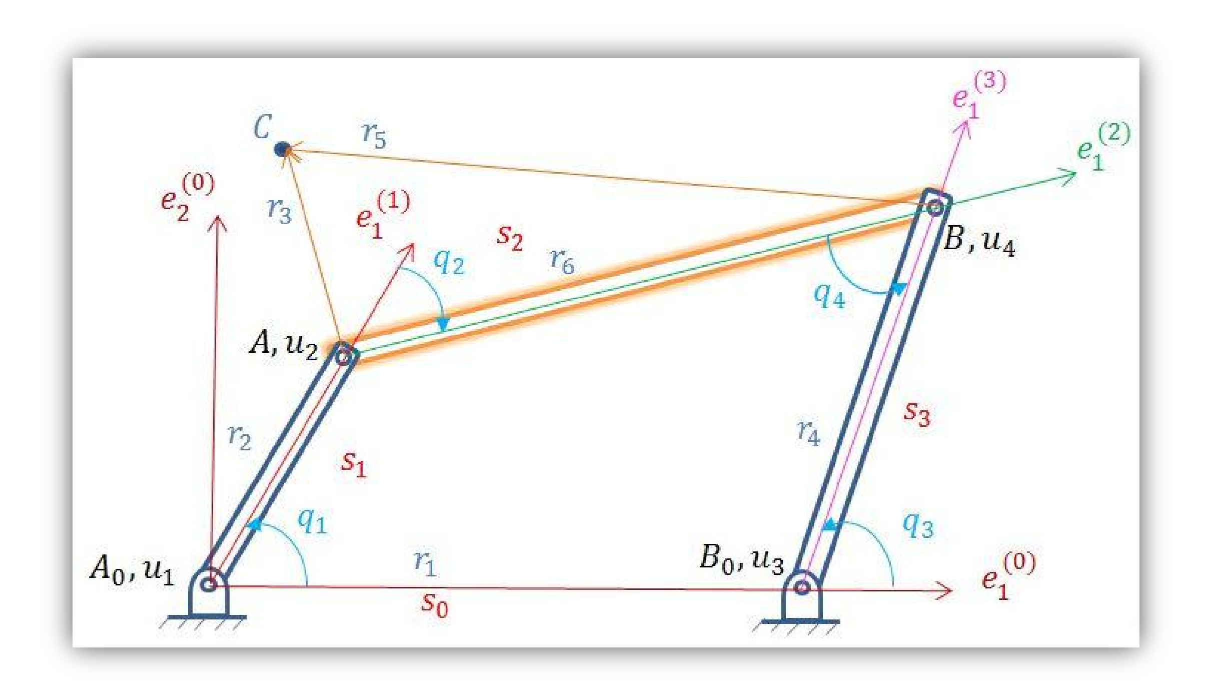
يكون الجسم الثابت هو الجسم الصفري ، يدور كل من الجسمين 1 و 3 ، دوراناً نسبياً حول نقطتين مثبتتين (A_0 و B_0) الشكل $(2-2-2)$.

و يدعى الجسم 2 بالجسم الرابط أو المحرض وهو الوحيد الذي ترسم نقطة منه مساراً مختلفاً (حيث هنا الدوران لهذا الجسم لا يتم حول نقطة ثابتة) .

يلعب في الغالب أحد الجسمين الأرضين 1 و 3 دور الجسم المدخل ، الذي يولد الحركة في الآلة ، يمكن تدوير هذا الجسم يدوياً أو من خلال محرك كهربائي أو هيدروليكياً أو بإسطوانة الضغط الهوائي.



الشكل $(2-2-1)$.



الشكل $(2-2-2)$.

لدينا في هذه الحالة جملة من أربعة أجسام (مع الثابت) مرتبطة بأربعة مفاصل دورانية الشكل $(1-2-2)$، $(2-2-2)$.

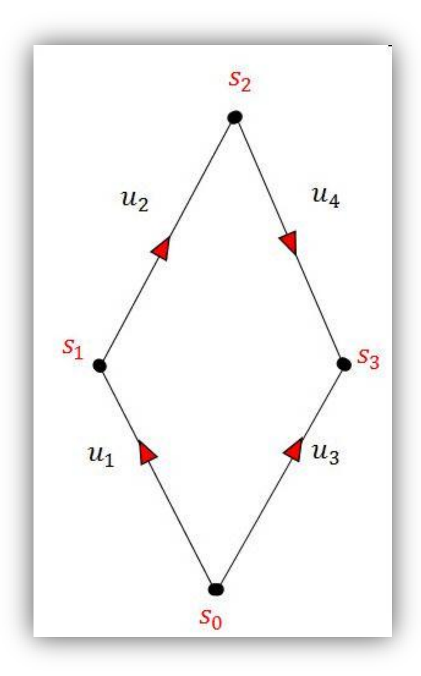
و يبين الشكل $(2-2-2)$ الجمل الإحداثية مع الإحداثيات المعممة .

و نعتبر الجسم الخاص هو الجسم ذو الرقم 2 ، ومنه النقطة الخاصة C ، ولنأخذ مبادئ الجمل الإحداثية $\underline{e}^{(0)}, \underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}$ ، النقاط A_0, A_0, A, B_0 على الترتيب .

ويبين الشكل $(3-2-2)$ ، بيان هذه الآلة (المنظومة) ، كما يوضح الجدول التالي قيم التابعين $i^{\pm}(a)$:

a	1	2	3	4
$i^{+}(a)$	0	1	0	2
$i^{-}(a)$	1	2	3	3

مخطط (بيان) المنظومة:



الشكل $(3-2-2)$.

إيجاد مصفوفات التراكيب :

أولا المصفوفة $\underline{I}$:استنادا إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ سابقا فان المصفوفة تأخذ الشكل:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ثانيا المصفوفة $\underline{\Phi}$: استنادا إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ فان المصفوفة تأخذ الشكل:

$$\underline{\Phi} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]$$

ثالثا المصفوفة $\underline{\Psi}$: إن المصفوفة $\underline{\Psi}$ تعطى بالشكل:

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{0}_{\hat{n}\times n} \end{bmatrix}; \hat{n} = m-n, \underline{T} = \underline{\breve{S}}^{-1}, \underline{T} = (\tau_{ai})(a,i = 1,\dots,n)$$

و من أجل المنظومة ذات الشكل $(3-2-2)$ لدينا :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{S}}_{0_{1\times n}} & \underline{\hat{S}}_{0_{1\times \hat{n}}} \\ \underline{\breve{S}}_{n\times n} & \underline{\hat{S}}_{n\times \hat{n}} \end{bmatrix} \qquad ; \hat{n} = m - n$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\breve{S}}_{n\times n} = \underline{\breve{S}}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن اعتماداً على برنامج $MATLAB\ R2010a$ فإن :

$$\underline{T} = inv(\underline{\breve{S}}) = \underline{\breve{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن :

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

ملاحظة: في حال اعتمدنا على تعريف المصفوفة $\underline{\Psi}$ فإنها تأخذ الشكل:

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

ما تفسير ذلك:

نلاحظ ان الفرق بين $(**)$ و$(*)$ هي العناصر ψ_{13}, ψ_{23} حيث قيمتها في $(*)$ هي $\psi_{13} = \psi_{23} = -1$ أما في $(**)$ فهي $\psi_{13} = \psi_{23} = 0$.

وبالنظر إلى الشكل $(3-2-2)$ نلاحظ أنه يمكنا الوصول إلى الجسم (الرأس) s_3 انطلاقاً من الجسم s_0 بطريقين $[s_0, s_3]$ أو $[s_0, s_1, s_2, s_3]$ وهنا نجد ما يلي :

$$\psi_{13} = 0 \;\; because \; u_1 \notin [s_0, s_3]$$

وهذا يدل على صحة (**) .

وكذلك :

$$\psi_{13} = -1 \;\; because \; u_1 \epsilon [s_0, s_1, s_2, s_3] \,, direction(u_1) = -1$$

اذا الأمر يعتمد على اختيار الطريق الذي يوصلنا إلى الجسم المطلوب.

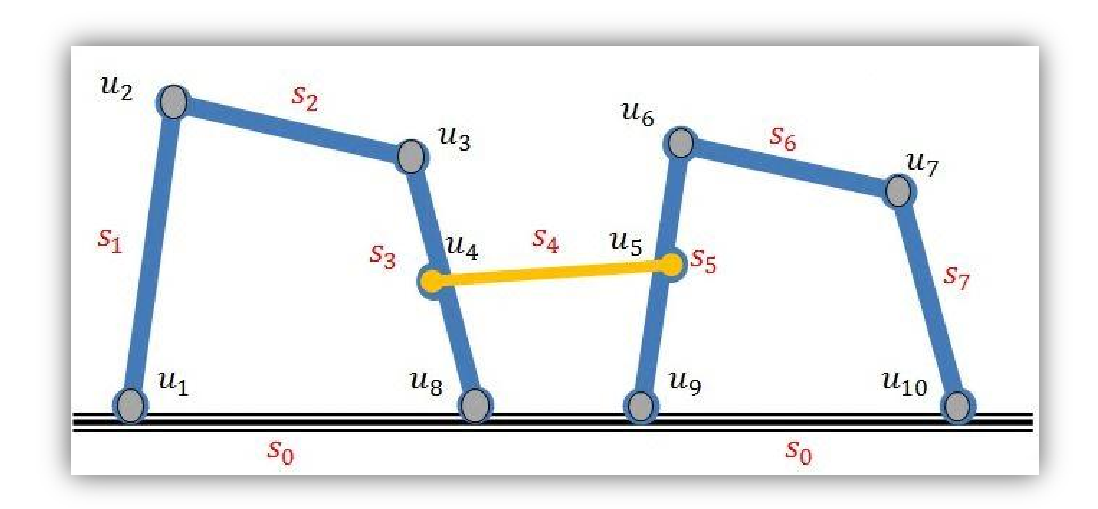
2.2.2.منظومة مولدة بآلتين رباعيتين

وهنا لدينا حالتين:

الحالة الأولى:

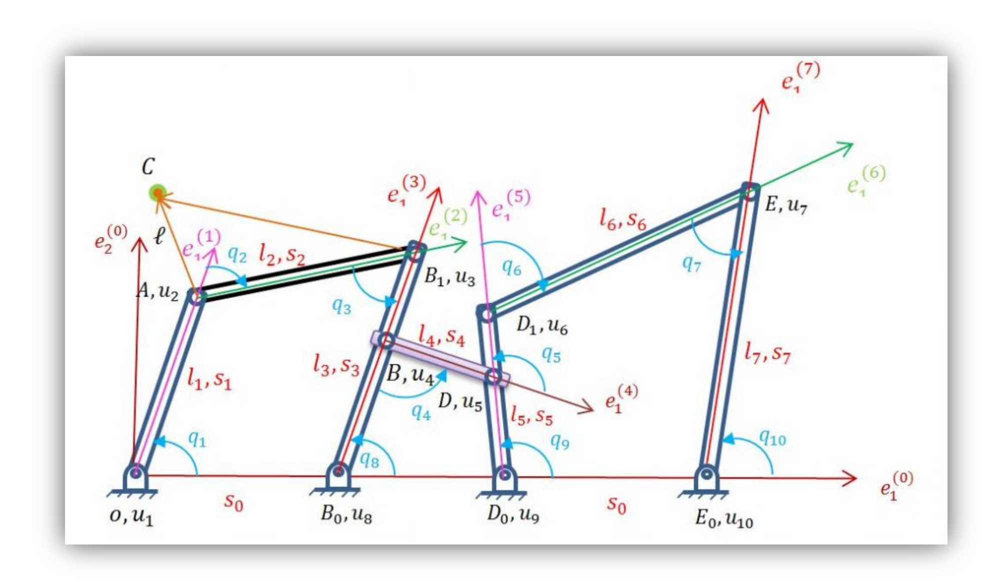
باستخدام وصلة ذات مفصل ثنائي الطرف:

تأخذ المنظومة الشكل التالي:



الشكل $(4-2-2)$.

والجمل الإحداثية:



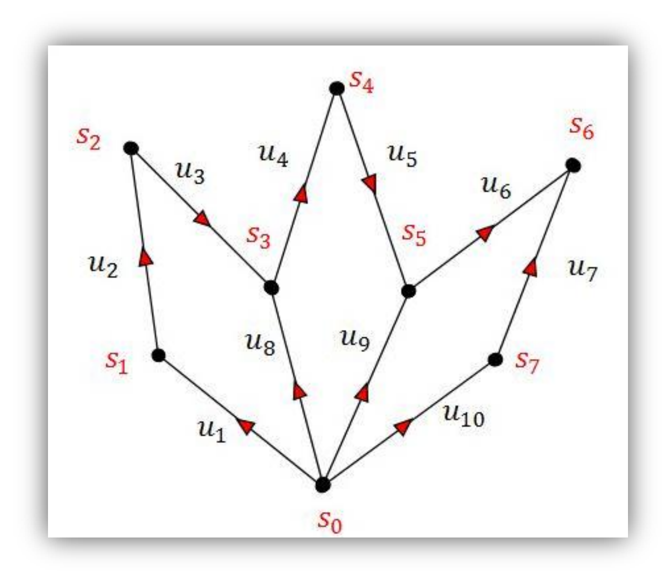
الشكل $(2-2-5)$

وهنا لدينا جملة من ثمانية أجسام (مع الثابت) مرتبطين بعشرة مفاصل دورانية الشكل $(4-2--2)$، $(5-2-2)$. يبين الشكل $5-2-2$ الجمل الإحداثية مع الإحداثيات المعممة .ونعتبر الجسم الخاص هو الجسم ذو الرقم 2 ، ومنه النقطة الخاصة C .

ولنأخذ مبادئ الجمل الاحداثية $\underline{e}^{(0)}, \underline{e}^{(1)}, \dots, \underline{e}^{(7)}$ ، النقطة $E_0, D_1, D_0, B, B_0, A, o, o$ على الترتيب . ويبين الشكل $(6-2-2)$ ، بيان هذه الآلة (المنظومة). وكما يوضح الجدول التالي قيم التابعين $i^{\pm}(a)$:

a	$i^+(a)$	$i^-(a)$
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6	5	6
7	7	6
8	0	3
9	0	5
10	0	7

مخطط (بيان) المنظومة:



الشكل $(6-2-2)$.

إيجاد مصفوفات التراكيب :

اولاً :المصفوفة $\underline{I}$:استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ سابقا فإن المصفوفة تأخذ الشكل :

$$\underline{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: المصفوفة $\underline{\Phi}$: استنادا إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ فإن المصفوفة تأخذ الشكل:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثالثاً: المصفوفة $\underline{\Psi}$: إن المصفوفة $\underline{\Psi}$ تعطى بالشكل :

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{0}_{\hat{n}\times n} \end{bmatrix}; \hat{n} = m - n, \underline{T} = \underline{\breve{S}}^{-1}, \underline{T} = (\tau_{ai}) \qquad (a, i = 1, \dots, n)$$

و من أجل المنظومة ذات الشكل $(6-2-2)$ لدينا :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{s}}_{0_{1\times n}} & \underline{\hat{s}}_{0_{1\times \hat{n}}} \\ \underline{\breve{s}}_{n\times n} & \underline{\hat{s}}_{n\times \hat{n}} \end{bmatrix} \qquad ; \hat{n} = m - n$$

$$\Rightarrow \underline{\breve{s}}_{n\times n} = \underline{\breve{s}}_{7\times 7} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن اعتماداً على برنامج $MATLAB\ R2010a$ فإن :

$$\underline{T} = inv(\underline{\breve{S}}) = \underline{\breve{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

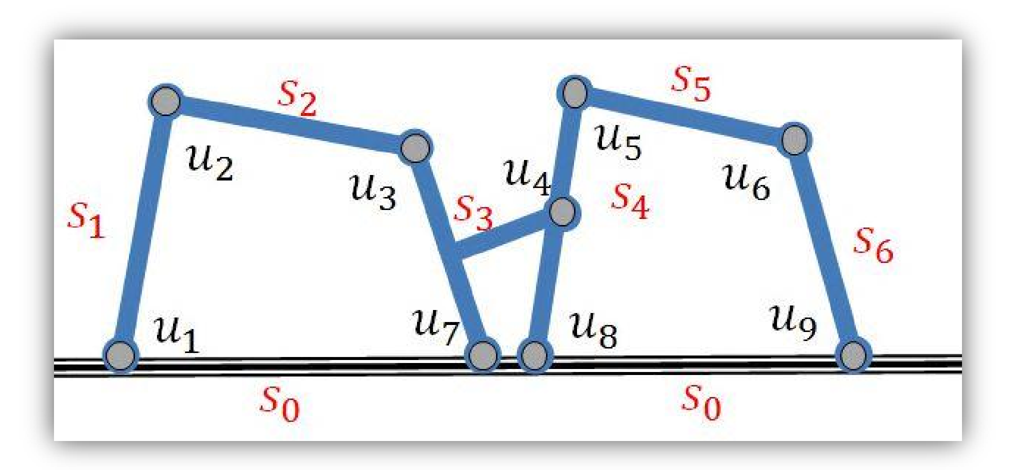
ومنه فإن :

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>الحالة الثانية:</u>

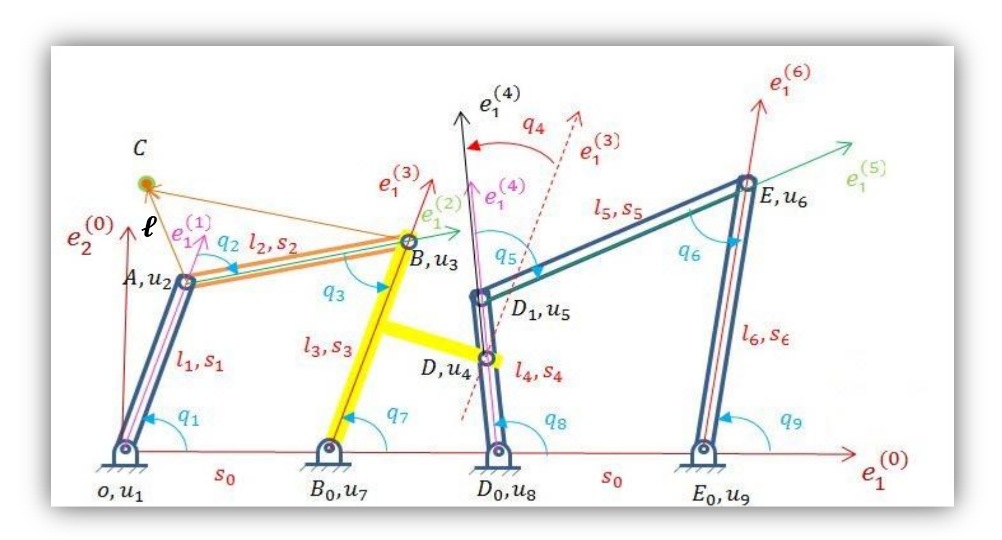
باستخدام وصلة ذات مفصل أحادي الطرف:

تأخذ المنظومة الشكل التالي:



الشكل (7 − 2 − 2) .

والجمل الإحداثية:



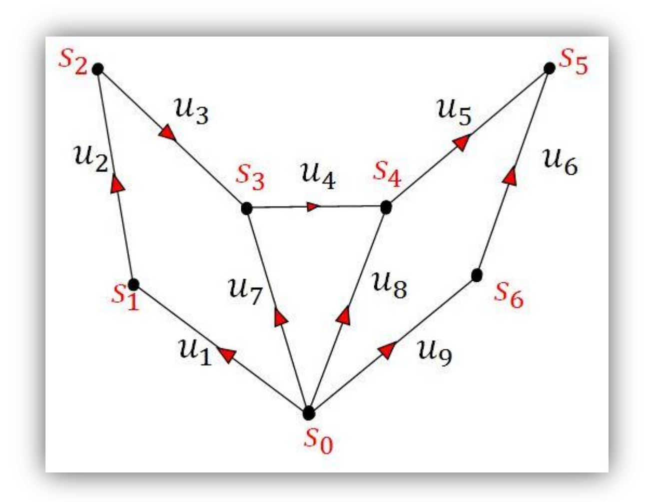
الشكل $(2-2-8)$

وهنا لدينا جملة من سبعة أجسام (مع الثابت) مرتبطة بتسع مفاصل دورانية الشكل $(2-2-7)$، $(2-2-8)$.ويبين الشكل $(2-2-8)$ الجمل الإحداثية مع الإحداثيات المعممة .

ونعتبر الجسم الخاص هو الجسم ذو الرقم 2 ، ومنه النقطة الخاصة C . نأخذ مبادئ الجمل الإحداثية $\underline{e}^{(0)}, \underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}, \underline{e}^{(4)}, \underline{e}^{(5)}, \underline{e}^{(6)}$ ، النقطة $o, o, A, B_0, D, D_1, E_0$ على الترتيب .ويبين الشكل $(2-2-9)$ ، بيان هذه الآلة (المنظومة) ، كما ويوضح الجدول التالي قيم التابعين $i^{\pm}(a)$:

a	$i^{+}(a)$	$i^{-}(a)$
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6	6	5
7	0	3
8	0	4
9	0	6

مخطط (بيان) المنظومة:



الشكل $(9-2-2)$.

إيجاد مصفوفات التراكيب :

اولاً المصفوفة $\underline{I}$:استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ سابقاً فإن المصفوفة تأخذ الشكل:

$$\underline{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&1&1\\-1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&1&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

ثانياً المصفوفة $\underline{\Phi}$: استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ فإن المصفوفة تأخذ الشكل:

$$\underline{\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&1&0&-1&-1\\0&0&0&-1&0&0&-1&1&0\\-1&-1&-1&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

ثالثاً المصفوفة $\underline{\Psi}$: إن المصفوفة $\underline{\Psi}$ تعطى بالشكل :

$$\underline{\Psi}=\begin{bmatrix}\underline{T}\\\underline{0}_{\hat{n}\times n}\end{bmatrix};\hat{n}=m-n,\underline{T}=\underline{\breve{S}}^{-1},\underline{T}=(\tau_{ai})\qquad (a,i=1,\dots,n)$$

و من أجل المنظومة ذات الشكل $(9-2-2)$ لدينا :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{S}}_{0_{1\times n}} & \underline{\hat{S}}_{0_{1\times \hat{n}}} \\ \underline{\breve{S}}_{n\times n} & \underline{\hat{S}}_{n\times \hat{n}} \end{bmatrix} \qquad ; \hat{n} = m - n$$

$$\Rightarrow \underline{\breve{S}}_{n\times n} = \underline{\breve{S}}_{6\times 6} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن اعتماداً على برنامج $MATLAB\ R2010a$ فإن :

$$\underline{T} = inv(\underline{\breve{S}}) = \underline{\breve{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن :

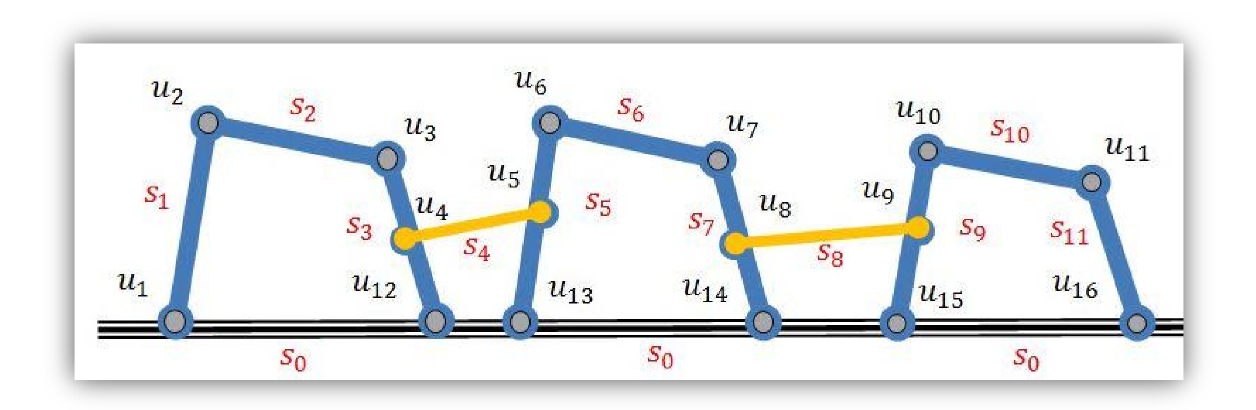
$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.3. منظومة مولدة بثلاث آلات رباعية:

وهنا لدينا حالتين:

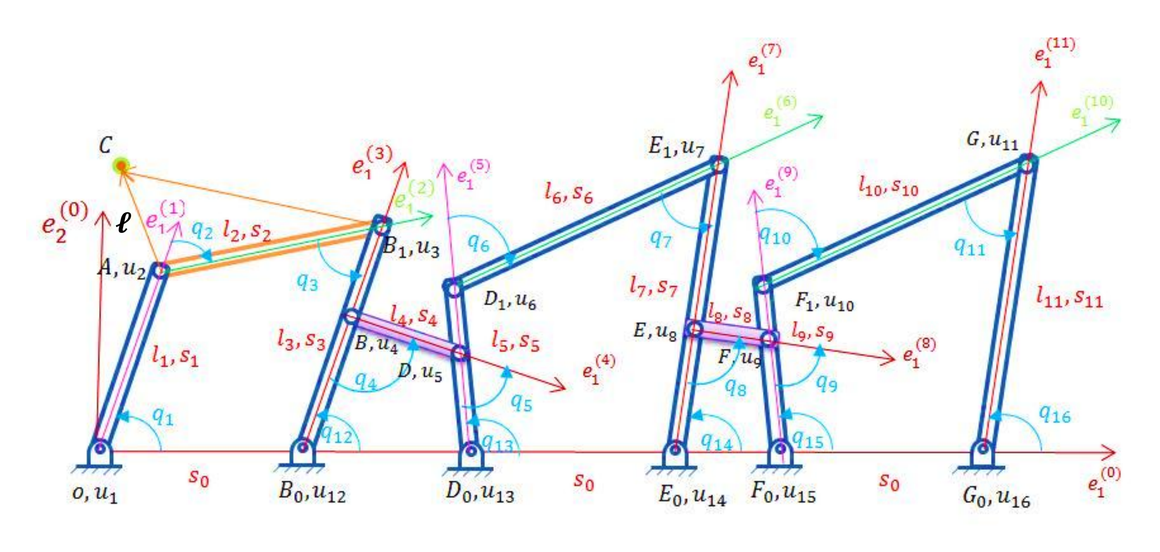
<u>الحالة الأولى:</u>

بإستخدام وصلة ذات مفصل ثنائي الطرف:



الشكل $(2-2-10)$.

والجمل الإحداثية:



الشكل $(2-2-11)$

وهنا لدينا جملة من إحدى عشر جسماً (مع الثابت) مرتبطين بست عشر مفصلاً دورانياً الشكل $(2-2-10)$، $(2-2-11)$.

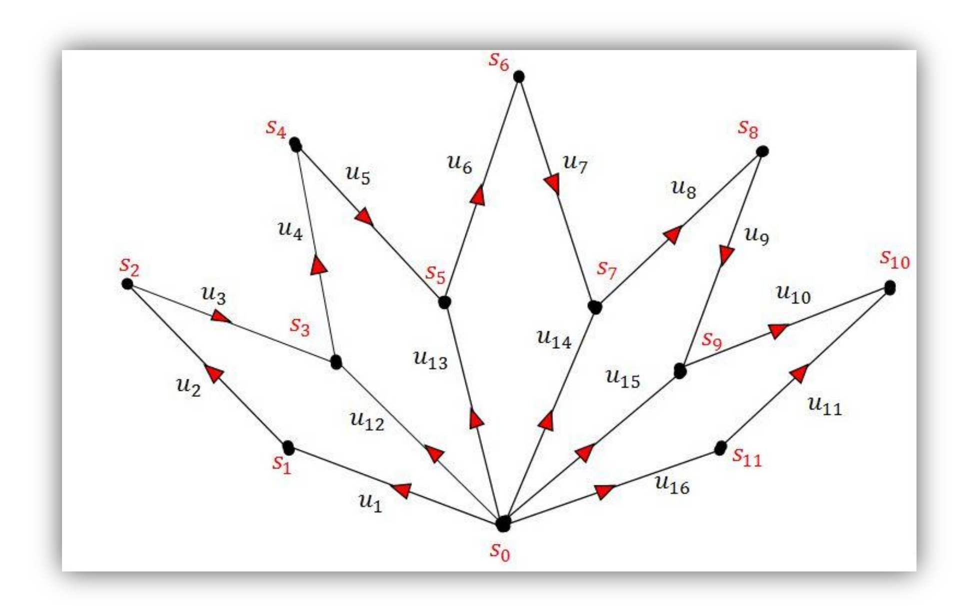
ويبين الشكل $(2-2-11)$ الجمل الإحداثية مع الإحداثيات المعممة .

ونعتبر الجسم الخاص هو الجسم ذو الرقم 2 ، ومنه النقطة الخاصة C ، ولنأخذ مبادئ الجمل الإحداثية $\underline{e}^{(0)}, \underline{e}^{(1)}, \dots, \underline{e}^{(11)}$ ، النقطة $o, o, A, B_0, B, D_0, D_1, E_0, E, F_0, F_1, G_0$ على الترتيب .

ويبين الشكل $(12-2-2)$ ، بيان هذه الآلة (المنظومة) . كما ويوضح الجدول التالي قيم التابعين $i^{\pm}(a)$:

a	$i^{+}(a)$	$i^{-}(a)$
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6	5	6
7	6	7
8	7	8
9	8	9
10	9	10
11	11	10
12	0	3
13	0	5
14	0	7
15	0	9
16	0	11

مخطط (بيان) المنظومة:



الشكل $(12-2-2)$.

إيجاد مصفوفات التراكيب :

أولاً المصفوفة ***I*** :استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ سابقاً فإن المصفوفة تأخذ الشكل :

$$
\underline{I}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
$$

ثانياً المصفوفة ***Φ*** : استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة $(1-2)$ فإن المصفوفة تأخذ الشكل :

$$
\underline{\Phi}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

ثالثاً المصفوفة $\underline{\Psi}$: إن المصفوفة $\underline{\Psi}$ تعطى بالشكل :

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{0}_{\hat{n}\times n} \end{bmatrix}; \hat{n} = m - n, \underline{T} = \underline{\breve{S}}^{-1}, \underline{T} = (\tau_{ai}) \qquad (a, i = 1, \dots, n)$$

و من أجل المنظومة ذات الشكل $(12 - 2 - 2)$ لدينا :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{S}}_{0_{1\times n}} & \underline{\hat{S}}_{0_{1\times \hat{n}}} \\ \underline{\breve{S}}_{n\times n} & \underline{\hat{S}}_{n\times \hat{n}} \end{bmatrix} \qquad ; \hat{n} = m - n$$

$$\Rightarrow \underline{\breve{S}}_{n\times n} = \underline{\breve{S}}_{11\times 11}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن اعتماداً على برنامج $MATLAB\ R2010a$ فإن :

$$\underline{T} = inv(\underline{\breve{S}}) = \underline{\breve{S}}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

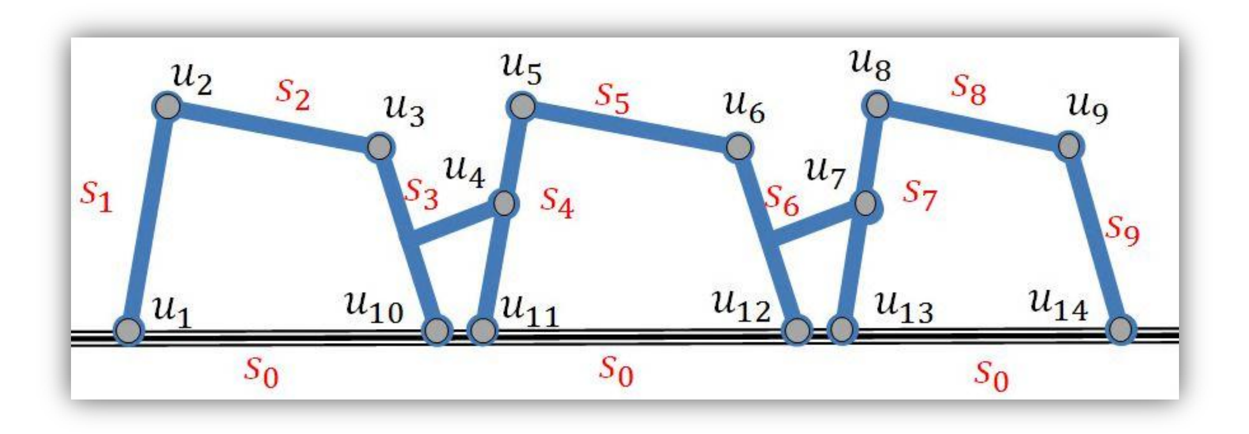
ومنه فإن :

$$
\underline{\Psi} = \begin{bmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

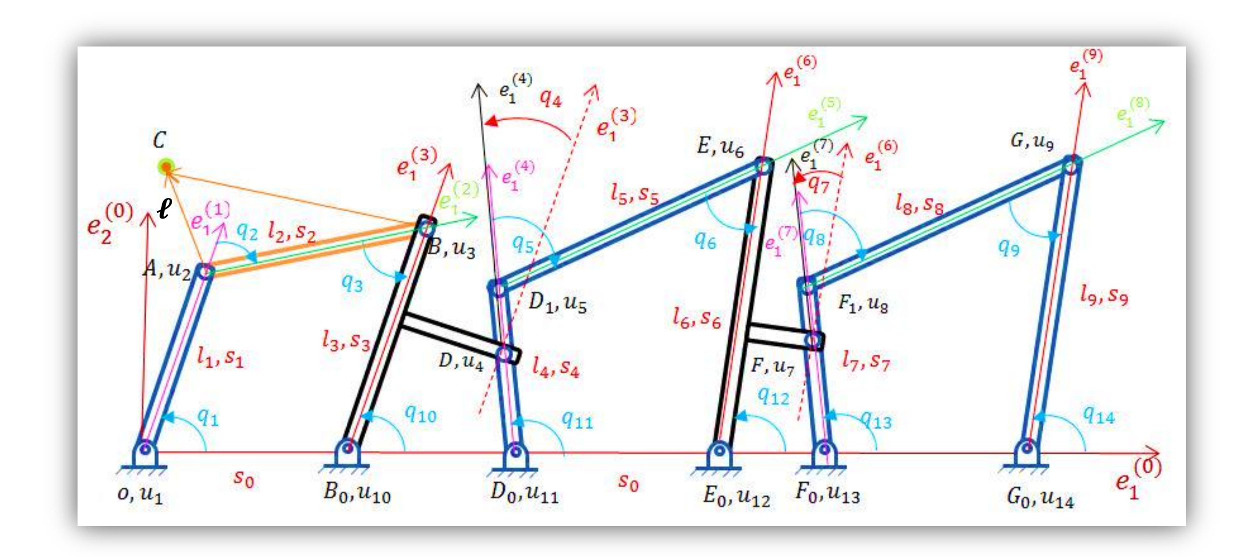
الحالة الثانية:

بإستخدام وصلة ذات مفصل أحادي الطرف:

تأخذ المنظومة الشكل التالي:



الشكل $(13-2-2)$.



الشكل $(2-2-14)$.

وهنا لدينا جملة من تسعة أجسام (مع الثابت) مرتبطة بأربعة عشر مفصلاً دورانياً الشكل $(2-2-13)$، $(2-2-14)$. ويبين الشكل $(2-2-14)$ الجمل الإحداثية مع الإحداثيات المعممة .

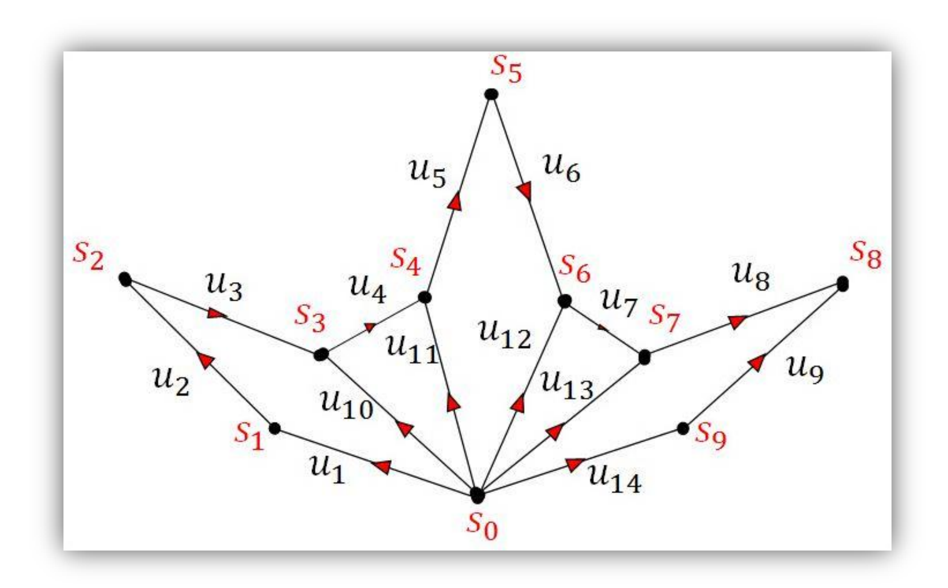
ولنعتبر الجسم الخاص هو الجسم ذو الرقم 2 ، ومنه النقطة الخاصة C ، ولنأخذ مبادئ الجمل الإحداثية $\underline{e}^{(0)}, \underline{e}^{(1)}, \ldots, \underline{e}^{(9)}$ ، النقاط $o, o, A, B_0, D, D_1, E_0, F, F_1, G_0$ على الترتيب .

ويبين الشكل $(2-2-15)$ ، بيان هذه الآلة (المنظومة) . كما ويوضح الجدول التالي قيم التابعين $i^{\pm}(a)$:

a	$i^+(a)$	$i^-(a)$
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6	5	6
7	6	7
8	7	8

9	9	8
10	0	3
11	0	4
12	0	6
13	0	7
14	0	9

مخطط (بيان) المنظومة:



الشكل $(15-2-2)$.

إيجاد مصفوفات التراكيب :

أولاً المصفوفة $\underline{I}$:استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة $(2-1)$ سابقاً فإن المصفوفة تأخذ الشكل :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ثانياً المصفوفة $\underline{\Phi}$: استناداً إلى التعريف الوارد في الفقرة (1 – 2) فإن المصفوفة تأخذ الشكل :

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثالثاً المصفوفة $\underline{\Psi}$: إن المصفوفة $\underline{\Psi}$ تعطى بالشكل :

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{0}_{\hat{n}\times n} \end{bmatrix}; \hat{n} = m - n, \underline{T} = \underline{\breve{S}}^{-1}, \underline{T} = (\tau_{ai}) \qquad (a, i = 1, \dots, n)$$

و من أجل المنظومة ذات الشكل (15 – 2 – 2) لدينا :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{S}}_{0_{1\times n}} & \underline{\hat{S}}_{0_{1\times \hat{n}}} \\ \underline{\breve{S}}_{n\times n} & \underline{\hat{S}}_{n\times \hat{n}} \end{bmatrix} \qquad ; \hat{n} = m - n$$

$$\Rightarrow \underline{\breve{S}}_{n\times n} = \underline{\breve{S}}_{6\times 6} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن اعتماداً على برنامج $MATLAB\ R2010a$ فإن :

$$\underline{T} = inv(\underline{\breve{S}}) = \underline{\breve{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن :

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بناء على ما سبق نتوصل إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة 1. من أجل أي منظومة مولدة من آلة رباعية واحدة على الأقل، فإن ما يلي محقق:

1. ليكن n عدد الآلات الرباعية المولدة للمنظومة. يعطى عدد عقد البيان الناتج الذي نرمز له بالرمز v، وعدد الأضلاع الذي نرمز له بالرمز m في حالة:

(I). وصلة أحادية المفصل وفق العلاقات التالية:

$$v = \begin{cases} 4n-1 & if(n=1) \\ 3n & if(n>1) \end{cases} \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

$$m = \begin{cases} 2(3n-1) & if(n=1) \\ 5n-1 & if(n>1) \end{cases} \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

(II). وصلة ثنائية المفصل وفق العلاقات التالية:

$$v = 4n-1 \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

$$m = 2(3n-1) \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

2. عدد الأضلاع المطلوب حذفها من البيان الناتج من منظومة مولدة من آلة رباعية هو فقط $(2n-1)$ ضلعا وبذلك نحصل على شجرة أساسية.

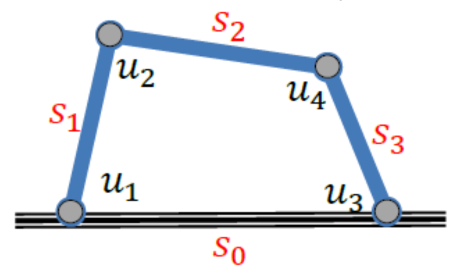
3. باختيار الترقيم النظامي فإن الأضلاع اللازمة والكافية للحصول على شجرة أساسية هي الأضلاع المتصلة مع الجسم الصفري جميعها باستثناء الضلع الأول (المفصل الأول) والذي هو ضلع من الحلقة الأساسية.

البرهان:

الطلب الأول (الوصلة احادية):

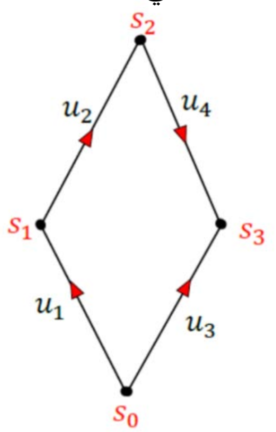
نبدأ من آلة رباعية وحيدة ، أي من أجل $n = 1$، ثم من أجل آلتين رباعيتين متصلتين بوصلة أحادية المفصل، أي من أجل $n = 2$،ثم من أجل ثلاث آلات رباعية متصلة بوصلة أحادية المفصل، أي من أجل $n = 3$ ، وهكذا بمتابعة العمل بهذه الطريقة نحصل بالاستقراء على المطلوب. لنبدأ أولا بالحالة التالية:

- من أجل $n = 1$ ، لدينا الآلة الرباعية الوحيدة التالية:



الشكل (16-2-2). آلة رباعية وحيدة ، أي من أجل $n = 1$.

يعطى بيان هذه المنظومة في الشكل التالي:



الشكل (17-2-2). البيان الموافق للمنظومة المعطاة في الشكل (16-2-2).

نلاحظ من الشكل (17-2-2) أن عدد رؤوس البيان هو $v = 3$. للتحقق من صحة العلاقة، نعوض $n = 1$ فنجد:

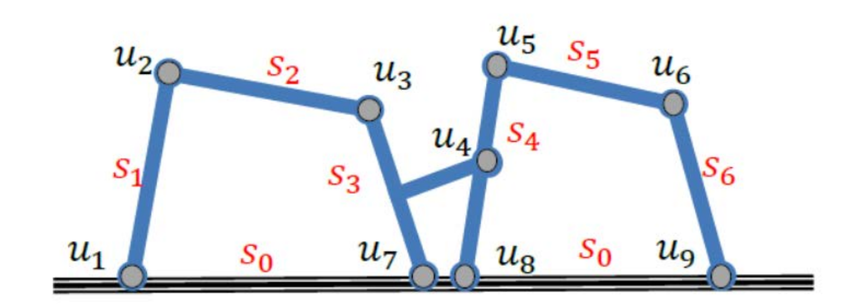
$$v = 4n - 1 \quad because\ (n = 1) \quad \Rightarrow \ v = 3$$

من جهة أخرى، نلاحظ أن عدد أضلاع البيان المعطى في الشكل (17-2-2) هو $m = 4$. للتحقق من صحة العلاقة، نعوض $n = 1$ فنجد:

$$m = 2(3n - 1) because\ (n = 1) \Rightarrow \ m = 4$$

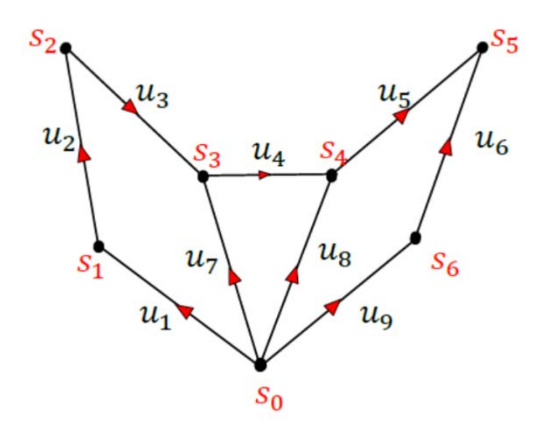
إذا العلاقة صحيحة من أجل $n = 1$.

- من أجل $n = 2$ ، لدينا الآلة الرباعية التالية:



الشكل (18-2-2). الآلة الرباعية من أجل $n = 2$.

يعطى البيان الموافق للآلة الرباعية المعطاة في الشكل (2-2-18) . كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل (2-2-19). البيان الموافق للآلة الرباعية المعطاة في الشكل (2-2-18).

من الشكل (2-2-19) ، نلاحظ أن عدد عقد البيان هو $v = 6$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 2$ ، فنجد:

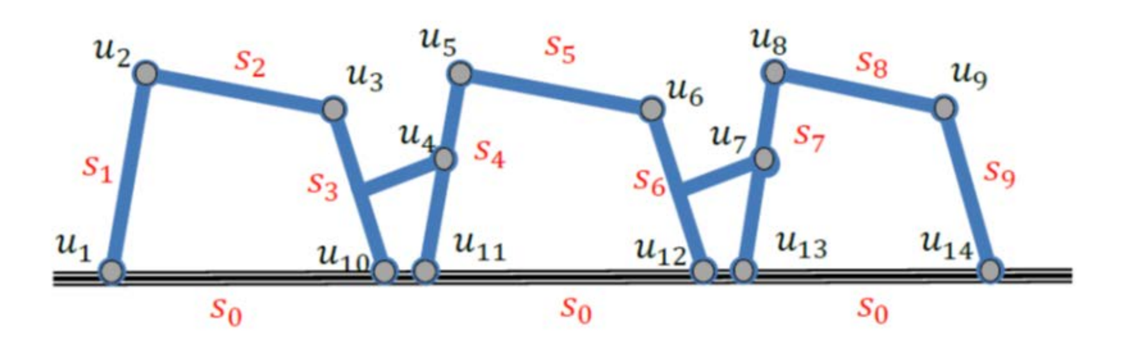
$$v = 3n \quad because\ (n > 1) \quad \Rightarrow\ v = 6$$

من جهة أخرى، نلاحظ أيضا من الشكل (2-2-19) أن عدد أضلاع البيان هو $m = 9$.
للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 2$ ، فنجد:

$$m = 5n - 1 \quad because\ (n > 1) \Rightarrow\ m = 9$$

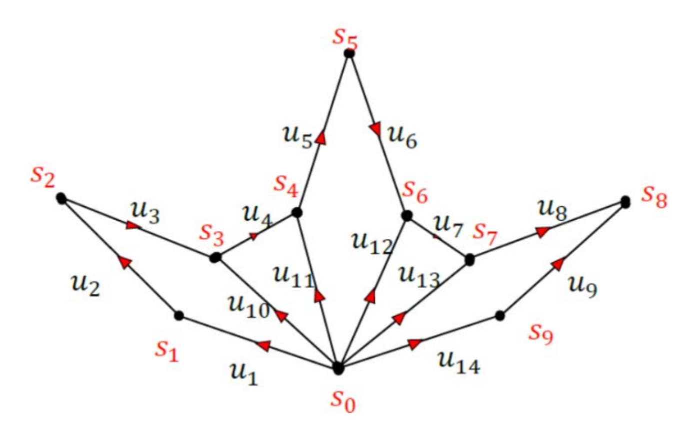
إذا العلاقة صحيحة من أجل $n = 2$.

- من أجل $n = 3$، تعطى الآلة الرباعية في الشكل التالي:



الشكل (2-2-20). الآلة الرباعية من أجل $n = 3$.

يعطى البيان الموافق للآلة الرباعية من الشكل (20-2-2) . كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل (21-2-2). البيان الموافق للآلة الرباعية من الشكل (20-2-2).

نلاحظ من الشكل (21-2-2) أن عدد عقد البيان هو $v = 9$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 3$، فنجد:

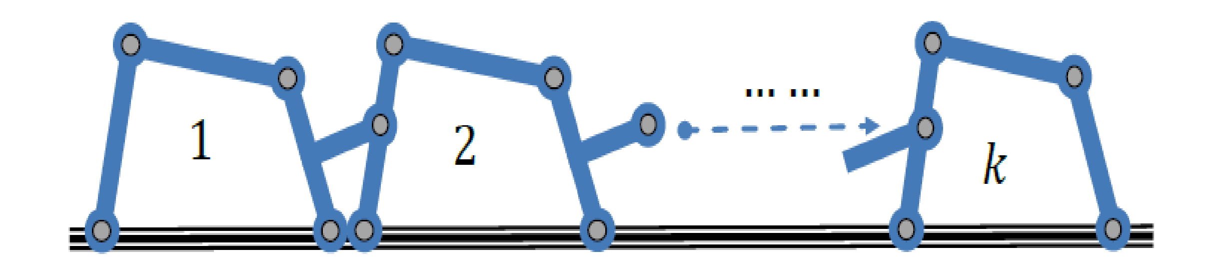
$$v = 3n \quad because\ (n = 3 > 1) \quad \Rightarrow \ v = 9$$

من جهة أخرى، نلاحظ أن عدد الأضلاع هو $m = 14$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 2$ فنجد:

$$m = 5n - 1 \quad because\ (n = 3 > 1) \Rightarrow \ m = 14$$

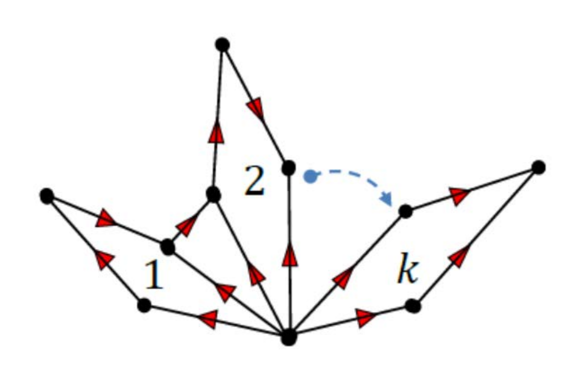
إذا العلاقة صحيحة من أجل $n = 3$.

- من أجل $n = k > 3$، تعطى الآلة الرباعية بالشكل التالي:



الشكل (22-2-2). الآلة الرباعية من أجل $n = k > 3$.

يعطى البيان الموافق للآلة الرباعية المعطاة في الشكل (2-2-22) . كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل (2-2-23). البيان الموافق للآلة الرباعية من الشكل (2-2-22).

من الشكل نجد أن عدد رؤوس البيان هو $v = 4k$ ، لأن عدد المركبات المكونة للبيان هو k (المركبة هي البيان الموافق لآلة رباعية وحيدة)، و عدد عقد كل مركبة هو 4. أما عدد العقد المشتركة بين المركبات هي 1 و بالتالي يجب حذف k عقدة.

إذا المجموع هو $v = 4k - k = 3k$.

و لحساب عدد أضلاع البيان الموافق للآلة الرباعية لدينا:

عدد أضلاع كل مركبة هو 4 ، و بما أن هناك k مركبة، فإن عدد الأضلاع هو $4k$. علاوة على ذلك، هناك$k - 1$ ضلعا يربط بين المركبات. بالنتيجة، عدد الأضلاع هو$5k - 1$. أي أن العلاقة صحيحة من أجل جميع $n = k > 1$. و بذلك يتم إثبات الطلب الأول من المبرهنة.

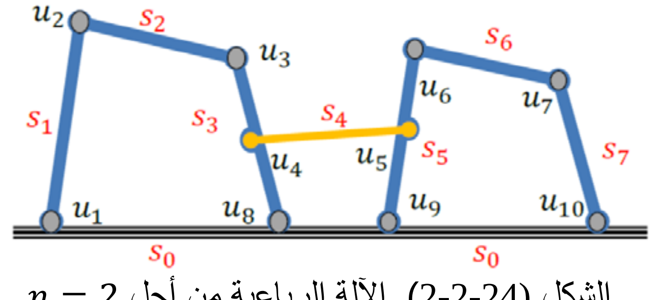
الطلب الأول الوصلة ثنائية:

نبدأ من آلة رباعية وحيدة ، أي من أجل $n = 1$، ثم من أجل آلتين رباعيتين متصلتين بوصلة ثنائية المفصل، أي من أجل $n = 2$ ،ثم من أجل ثلاث آلات رباعية متصلة بوصلة ثنائية المفصل أي من أجل $n = 3$ ، وهكذا .... بمتابعة العمل وفق هذه الطريقة نحصل على المطلوب.

- **من أجل** $\mathrm{n} = 1$:

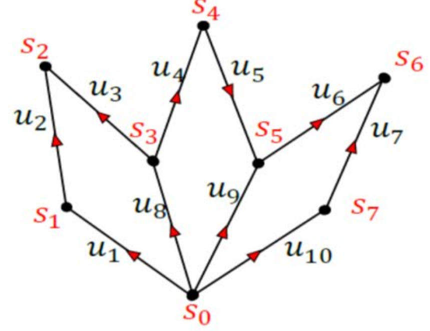
بإتباع الطريق نفسها في برهان الطلب الأول من أجل$n = 1$، فإننا نجد أن العلاقات صحيحة في هذه الحالة.

- من أجل $n = 2$: تعطى الآلة الرباعية الموافقة كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل (2-2-24). الآلة الرباعية من أجل $n = 2$.

يعطى البيان الموافق للمنظومة من الشكل (2-2-24) . كما هو مبين في الشكل (2-2-25):



الشكل (2-2-25). البيان الموافق للمنظومة من الشكل (2-2-24).

من الشكل (2-2-25)، نلاحظ أن عدد عقد البيان هو $v = 7$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 2$، فنجد أن:

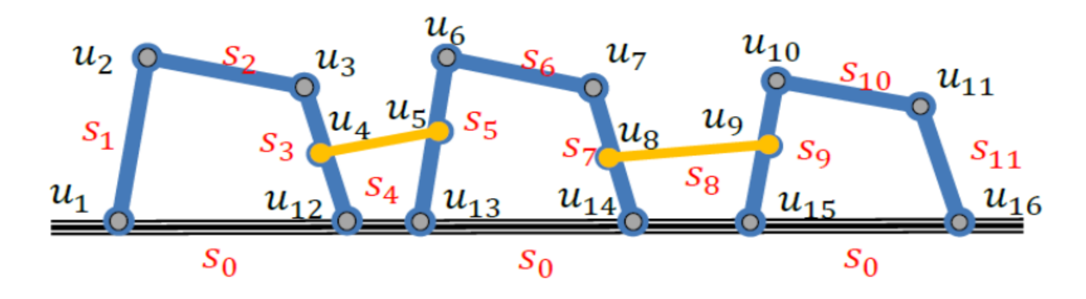
$$v = 4n - 1 \quad \Rightarrow \quad v = 7$$

من جهة أخرى، نلاحظ أيضا أن عدد الأضلاع هو $m = 10$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 2$ فنجد:

$$m = 2(3n - 1) \Rightarrow m = 10$$

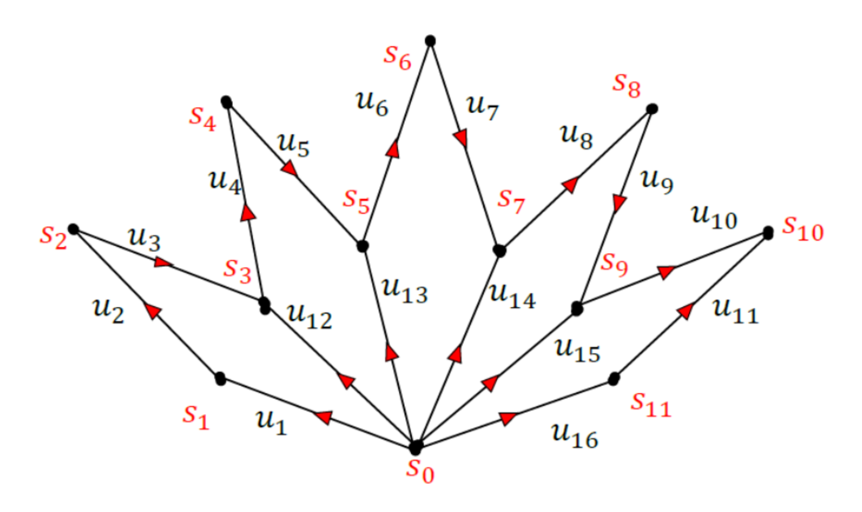
إذا العلاقة صحيحة من أجل $n = 2$.

- من أجل $n = 3$: تعطى الآلة الرباعية في هذه الحالة بالشكل التالي:



الشكل (2-2-26). الآلة الرباعية من أجل $n = 2$.

أما بيان المنظومة الموافق فيعطى في الشكل التالي:



الشكل (2-2-27). البيان الموفق للمنظومة من الشكل (2-2-26).

من الشكل(2-2-27)، نلاحظ أن عدد عقد البيان هو $v = 11$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 3$ فنجد:

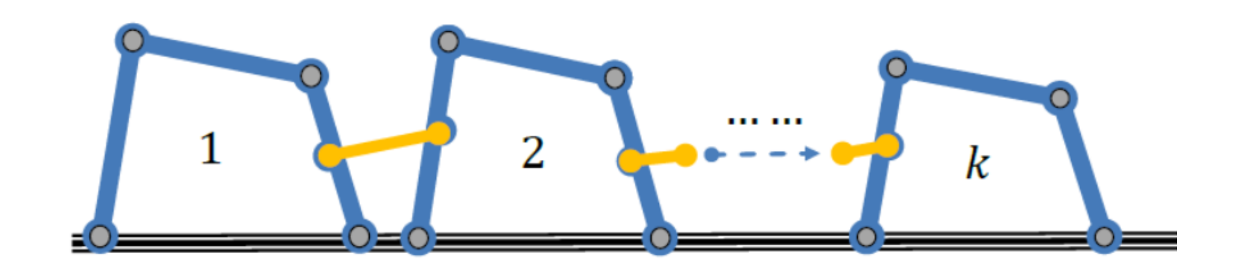
$$v = 4n - 1 \quad \Rightarrow \ v = 11$$

من جهة أخرى، نلاحظ أيضا أن عدد الأضلاع هو $m = 16$. للتحقق من صحة العلاقة نعوض $n = 2$ فنجد:

$$m = 2(3n - 1) \Rightarrow \ m = 16$$

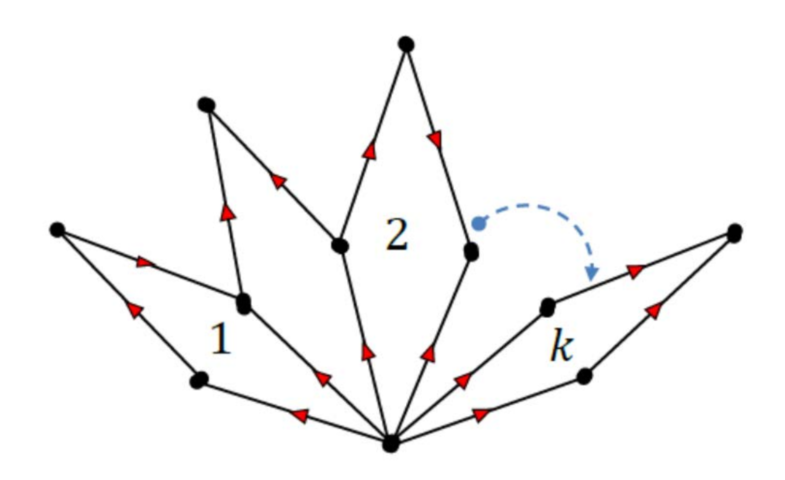
إذا العلاقة صحيحة من أجل $n = 3$.

- من أجل $n = k > 3$، تعطى الآلة الرباعية بالشكل التالي:



الشكل (2-2-28). الآلة الرباعية من أجل $n = k > 3$.

يعطى البيان الموافق للآلة الرباعية المعطاة في الشكل (2-2-28) كما هو مبين في الشكل التالي:



الشكل (2-2-29). البيان الموافق للآلة الرباعية من الشكل (2-2-28).

من الشكل نجد أن عدد عقد البيان هو $v = 4k + k - 1$ ، لأن عدد المركبات المكونة للبيان هو k ، و عدد عقد كل مركبة هو 4. أما عدد العقد المشتركة بين المركبات هي 1 و بالتالي يجب حذف $k - 1$ عقدة . إذا المجموع هو $v = 5k - 1$. علاوة على ذلك، عدد العقد التي تربط بين المركبات فهي k. بالنتيجة عدد عقد البيان هو $v = 4k - 1$.
لحساب عدد أضلاع البيان الموافق للآلة الرباعية لدينا:
عدد أضلاع كل مركبة هو 4 ، و بما أن هناك k مركبة، فإن عدد الأضلاع هو $4k$. علاوة على ذلك، هناك $2k - 2$ ضلعا يربط بين المركبات. بالنتيجة، عدد الأضلاع هو $6k - 2$. أي أن العلاقة صحيحة من أجل جميع $n = k > 1$. و بذلك يتم إثبات الطلب الثاني من المبرهنة.

الطلب الثاني :

من أجل بيان مترابط فيه $m > v$ ، يمكن تحويل البيان إلى بنية شجرية بحذف $m - v$ ضلعاً نختارها بشكل مناسب (بالطبع، يمكن القيام بذلك وفق أكثر من طريقة).

وفقا لما سبق يمكننا أن نكتب:

$$\hat{n} = m - v$$

لنطبق ذلك على الحالات التي أوجدناها آنفا ولنتأكد أنه يلزم حذف$(2n - 1)$ ضلعا للحصول بنية شجرية تشكل شجرة أساسية.

1. في حالة وصلة أحادية المفصل:

$$v = \begin{cases} 4n-1 & if(n=1) \\ 3n & if(n>1) \end{cases} \quad ; \quad n = 1,2,\dots$$

$$m = \begin{cases} 2(3n-1) & if(n=1) \\ 5n-1 & if(n>1) \end{cases} \quad ; \quad n = 1,2,\dots$$

نجد أن:

$$\hat{n} = m - v$$

$$= \begin{cases} 2(3n-1)-(4n-1) = 2n-1 & if(n=1) \\ (5n-1)-3n \quad\quad = 2n-1 & if(n>1) \end{cases} \quad ; \quad n = 1,2,\dots$$

إذا العلاقة صحيحة .

2. في حالة وصلة ثنائية المفصل :

$$v = 4n-1 \quad ; \quad n = 1,2,\dots$$

$$m = 2(3n-1) \quad ; \quad n = 1,2,\dots$$

نجد أن:

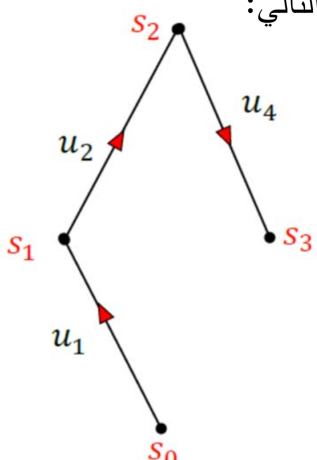
$$\hat{n} = m - v = 2(3n-1)-(4n-1) = 2n-1 \quad ; \quad n = 1,2,\dots$$

إذا العلاقة صحيحة.

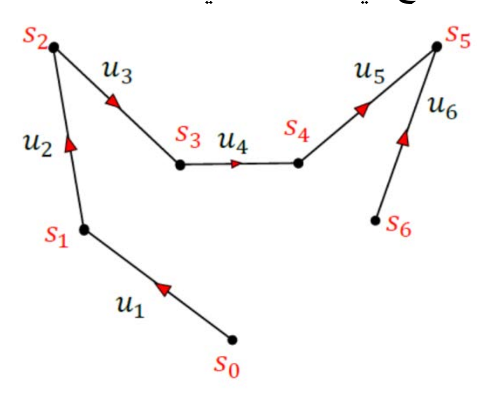
الطلب الثالث :

1. في حالة وصلة أحادية المفصل:

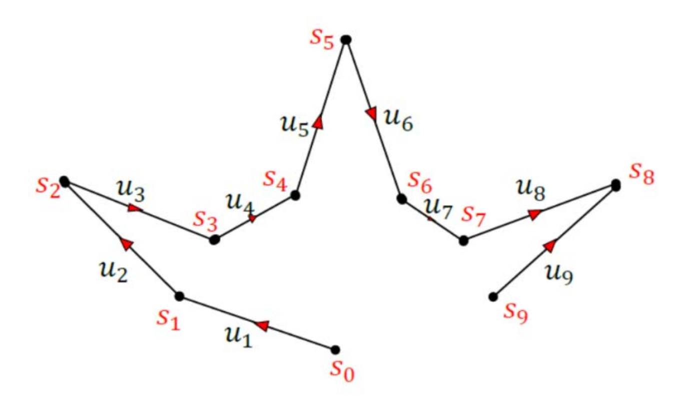
نأخذ البيان المعطى في الشكل (17-2-2) فنجد أنه بحذف الضلع u_3 نحصل على شجرة أساسية كما هو موضح في الشكل التالي:



من جهة أخرى، لنأخذ البيان من الشكل (19-2-2) ، فنجد أنه بحذف الأضلاع u_7, u_8, u_9 نحصل على شجرة أساسية كما هو موضح في الشكل التالي:

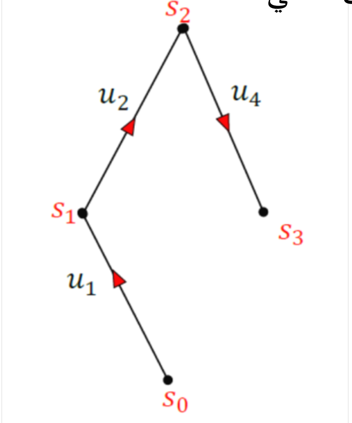


و هكذا من أجل البيان المعطى في الشكل (21-2-2) ، فإننا بحذف الأضلاع $u_{10}, u_{11}u_{12}, u_{13}, u_{14}$ نحصل على شجرة هيكلية كما هو مبين في الشكل التالي:

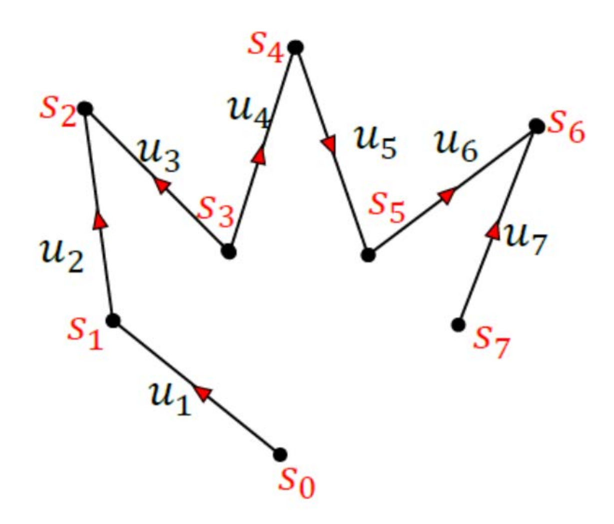


2. حالة وصلة ثنائية المفصل:

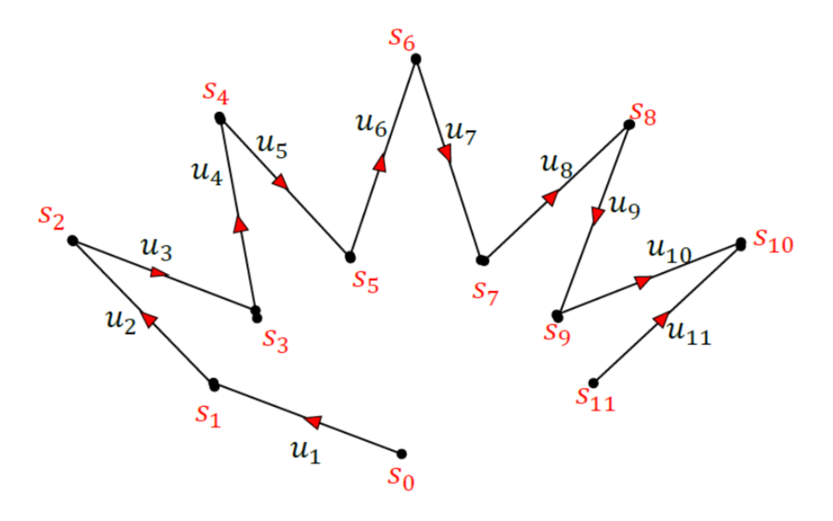
نأخذ البيان المبين في الشكل (17-2-2) فنجد أنه بحذف الضلع u_3 نحصل على شجرة هيكلية كما هو مبين في الشكل التالي:



ومن أجل البيان المبين في الشكل (25-2-2) نجد أنه بحذف الأضلاع u_8, u_9, u_{10} نحصل على شجرة أساسية كما هو موضح في الشكل التالي:



وأخيرا، من أجل البيان المعطى في الشكل (27-2-2) نجد أنه بحذف الأضلاع $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}$ نحصل على شجرة أساسية كما هو مبين في الشكل التالي:



وبهذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة 1.

ينتج من المبرهنة 1 أنه:

1. في حالة وصلة أحادية المفصل:

فإن عدد الرؤوس وعدد الأضلاع يشكل متتالية يعطى حدها العام وفق الصيغة التالية:

$$v_n = \begin{cases} 4n-1 & if\,(n=1) \\ 3n & if\,(n>1) \end{cases} \quad ; \quad n = 1,2, \ldots$$

$$m_n = \begin{cases} 2(3n-1) & if\,(n=1) \\ 5n-1 & if\,(n>1) \end{cases} ; \quad n = 1,2, \ldots$$

2. **في حالة وصلة ثنائية المفصل:**

فإن عدد العقد وعدد الأضلاع يشكل متتالية يعطى حدها العام بالصيغة التالية:

$$v_n = 4n - 1 \qquad ; \quad n = 1,2, \dots$$
$$m_n = 2(3n - 1) \qquad ; \quad n = 1,2, \dots$$

نتيجة: في كلتا الحالتين السابقتين نجد أن:

عدد الحلقات الأساسية ، الذي هو نفسه عدد الأضلاع المطلوب حذفها حتى يتحول البيان إلى شجرة أساسية، يشكل متتالية يعطى حدها العام بالصيغة التالية:

$$X_n = 2n - 1 \qquad ; \quad n = 1,2, \dots$$

تعطى حدود هذه المتتالية بالشكل $(1,3,5,7, \dots ,2n - 1, \dots)$. أي أن عدد الحلقات الأساسية من أجل أي منظومة مولدة بآلة رباعية هو **عدد فردي** حصرا ، و لا يوجد أية منظومة عدد حلقاتها الأساسية زوجي على الإطلاق.

الفصل الثالث

التحليل الدقيق للانزياح النسبي ، التحليل الدقيق لمنظومة مستوية مولدة بالآلة الرباعية بشكل كامل

3. التحليل الدقيق للانزياح النسبي ، التحليل الدقيق لمنظومة مستوية مولدة بالآلة الرباعية بشكل كامل

3.1. التحليل الدقيق للانزياح النسبي:

يتعين وضع الجسم $i^-(a)$ بالنسبة للجسم $i^+(a)$ من خلال نصف القطر المتجهي z_a لنقطة اختيارية من الجسم الأول بالنسبة لنقطة من الجسم الأخير $i^+(a)$ وزاوية q_a بين المحورين $e_1^{i^+(a)}$ و $e_1^{i^-(a)}$. وليس من الضرورة ان يكون المتجه z_a معيناً من مبدأي الجملتين $C_{i^\mp(a)}$. فيمكن اختيار أي نقطتين من الجسمين لهذا الهدف [7]. نسمي هكذا نقاط بالنقاط المفصلية ، ويتم اختيار هذه النقاط عادة بحيث تقود إلى تسهيل في الحسابات . وتتعين هذه النقاط المفصلية من المتجهات المحلية لهم $c_{i^\mp(a)}$ بالنسبة لمبدأي الجملتين المثبتتين في الجسمين $C_i\underline{e}^{(i)}$ حيث يدل الدليل الأول على رقم الجسم ، والدليل الثاني يدل على الوصلة ، والتي هي المفصل الموافق . ونرمز للنقاط المفصلية بالرمز $c_{i^\mp(a)a}$ الشكل $(3-1-1)$، بنفس دلائل المتجه المحلي ، ولهذا فإن $\left(i = i^\mp(a)\,, a = 1, \cdots, m\right)$; $c_{ia} = \overline{C_i C_{ia}}$.

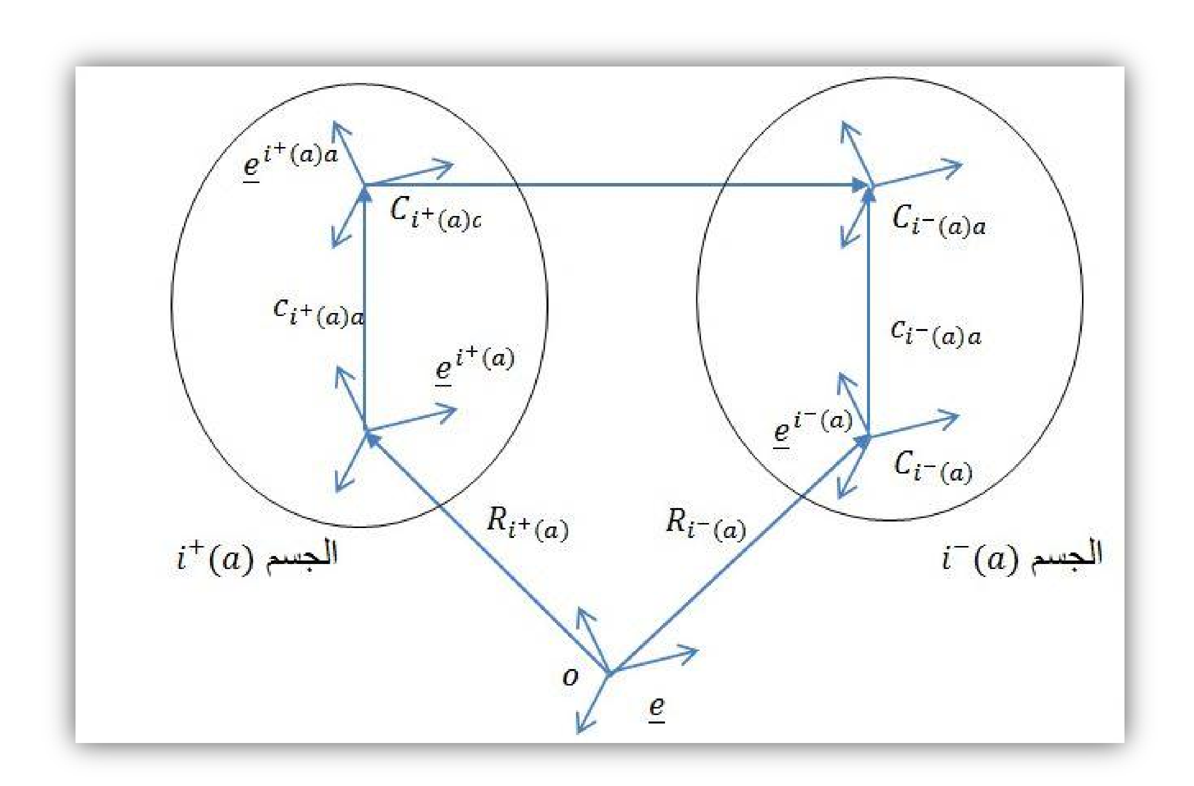
إن المتجه z_a والجملة $\underline{e}^{i^-(a)}$ تابعان للوسيط المختار للحركة النسبية في الوصلة a ، أي :

$$z_a = z_a(q_a), \underline{e}^{(i^-(a))} = \underline{e}^{(i^-(a))}(q_a) \qquad (3.1.1)$$

ولنختار النقطتين المفصليتين ، نهايتي الوصلة (المفصل المرن) ، والمحورين $e_1^{i^+(a)\,a}$ ، $e_1^{i^-(a)\,a}$ موجهان من المفصل المرن ، قبل التشوه وعند الوضع $\underline{q}^*$ وبعد ذلك يبقى الجسمان الموافقان ثابتين الشكل $(3-1-2)$.

ويتعين وضع المفصل المرن قبل التشوه بالنسبة للجملتين المعرفتين في الجسمين المتجاورين بالزاوية $\alpha_a^+ = \angle(\, e_1^{i^+(a)a}, e_1^{i^+(a)a})$ بالإضافة للزاوية $\alpha_a^- = \angle\left(\, e_1^{i^-(a)a}, e_1^{i^-(a)a}\right)$.

إن الحركة النسبية في الآلة الناتجة في المفصل a ، هي دوران حول المركز R_a ، المتوضع في منتصف المفصل المرن حيث يوضحها الشكل $(3-1-2)$ وهنا للمتجه z_a الصيغة :[7]

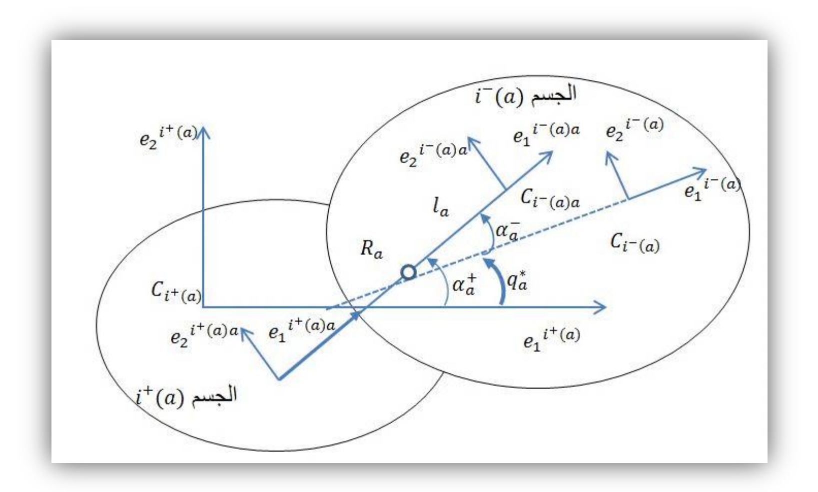


الشكل $(3-1-1)$.

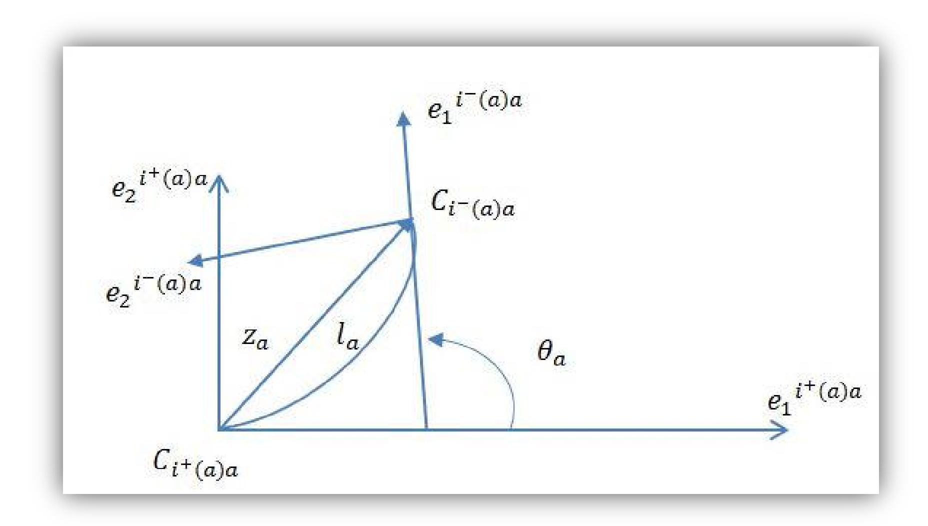
$$\begin{cases} z_a^r = \overline{c_{i^+(a)a}c_{i^-(a)a}} = \overline{c_{i^+(a)a}R_a} + \overline{R_a c_{i^-(a)a}} = \\ z_a^r = \left(\frac{l_a}{2} + \frac{l_a}{2}\cos q_a\right) e_1^{i^+(a)a} + \left(\frac{l_a}{2}\sin q_a\right) e_2^{i^+(a)a} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

ويدل الرمز (r) على صفة الصلابة وعلى الأجزاء الصلبة في الآلة الجديدة . ويدل الرمز l_a على طول المفصل المرن ، والذي نفترضه مقدار صغير ، $l_a \ll 1$ الشكل $(3-1-3)$.

وتتحقق الحركة النسبية في الآلة المرنة في الوصلة a بفضل التشوه المرن لهذه الوصلة البديلة عن المفصل الدوراني [7].



الشكل $(3-1-2)$



الشكل $(3-1-3)$

ويتعين وضع الجملة $c_{i^-(a)a}\, e^{i^-(a)a}$ بالنسبة للجملة $c_{i^+(a)a}\, e^{i^+(a)a}$ أثناء التشوه المرن بالزاوية $\theta_a = \angle(\, e_1^{i^+(a)a}, e_1^{i^-(a)a})$.

ولنفرض أن الزاوية q_a تعني نفس الرمز في الآلة الجديدة (المرنة) $\angle\left(\, e_1^{i^+(a)a}, e_1^{i^-(a)a}\right)$.

ومن الواضح أن (الشكل $(3-1-4)$ ، $(3-1-5)$):

$$q_a = \alpha_a^+ + \theta_a - \alpha_a^- = \theta_a + q_a^* \qquad (3.1.3)$$

ومن الواضح أن وضع المفصل المرن قبل التشوه $\theta_a = 0$ حيث تأخذ أجسام كلا الآلتين وضع تطابقي $\underline{q}^*$ في الفراغ الشكل $(3-1-5)$.

واعتمادا على الفقرة السابعة من الفصل الأول من اطروحة الدكتوراه للدكتور مصطفى حسن أنه يتعين وضع المفصل المرن المتشوه بدلالة الزاوية θ_a .

ويتعين الآن وضع الانتقال الإنسحابي z_a للجملة الإحداثية $c_{i^-(a)a}\ e^{i^-(a)a}$ بالنسبة للجملة $c_{i^+(a)a}\ e^{i^+(a)a}$ ، بالشكل :

$$z_a = \quad \overline{c_{i^+(a)a}c_{i^-(a)a}} = f_a(\theta_a)e_1^{i^+(a)a} + g_a(\theta_a)e_2^{i^+(a)a} \qquad (3.1.4)$$

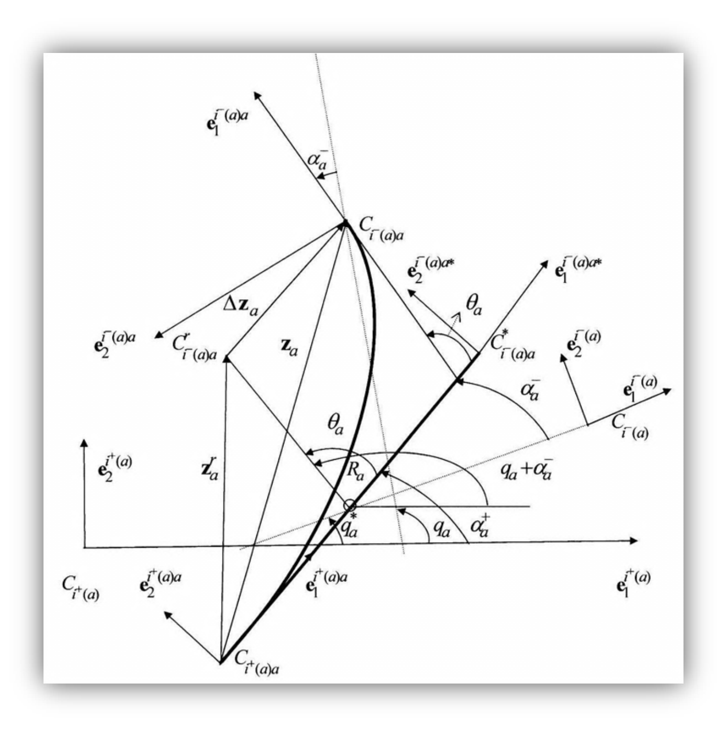
لقد تم تعين التابعين $f_a(\theta_a)$ و $g_a(\theta_a)$ ، في الفقرات الثانية والرابعة والخامسة من الفصل الأول من اطروحة الدكتوراه للدكتور مصطفى حسن [7] .

ويمكن تعينهم تجريبياً ايضاً .

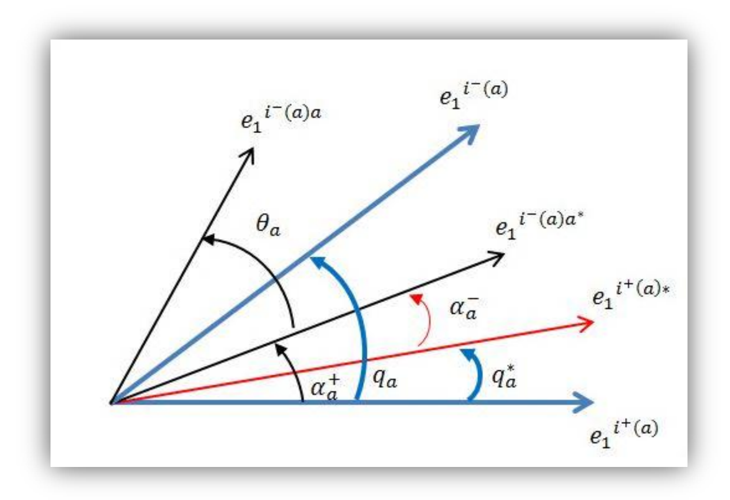
وبالتالي ، الانزياح المطلوب هو الفرق بين (3.1.2) و (3.1.4) (الشكل $(3-1-4)$) :

$$\Delta z_a = z_a - z_a^r =$$

$$= \left[f_a(\theta_a) - \left(\frac{l_a}{2} + \frac{l_a}{2}\cos\ q_a\right)\right] e_1^{i^+(a)a} + \left[g_a(\theta_a) - \left(\frac{l_a}{2}\sin\ q_a\right)\right] e_2^{i^+(a)a} \quad (3.1.5)$$



الشكل $(3-1-4)$



3.2. التحليل الدقيق لمنظومة مستوية مولدة للآلية الثلاثية (الرباعية بشكل كامل):

لو نأخذ الجملة $O_0\underline{e}^0$ ، كجملة مطلقة في الجسم الصفري ، ولنرمز لها إختصاراً بـ $O\underline{e}$. فيتعين وضع أي جسم بالنسبة لها بمساعدة نصف القطر المتجهي R_i لنقطة مثبتة فيه C_i ولجملة متعامدة ونظامية فيه $\underline{e}^i$; $(i = 1,2,\dots,n)$. ولنرمز للسرعة الزاوية المطلقة للجسم بـ ω_i عوضاً عن الرمز d/dt (المشتق في الجملة المطلقة) ولنستخدم الرمز (.) فوق الكمية الموافقة ، فمثلا $\dot{R}_i$, $\dot{\omega}_i$ وهكذا. عندها يمكن أن نكتب :

$$R_0 = \dot{R}_0 = \ddot{R}_0 = 0 \qquad , \qquad \omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0$$

وبما أنه لدينا في أي مفصل درجة حرية واحدة للحركة النسبية ، فإن وضع الجملة كاملة ، يتعين بـ (m) وسيطاً معمماً ، $\underline{q} = (q_1,\dots,q_m)^T$. ويمكننا من أجل جسمين اختياريين (الشكل $(3-1-1)$) أن نكتب:

$$\left(R_{i^+(a)} + c_{i^+(a)a}\right) - \left(R_{i^-(a)} + c_{i^-(a)a}\right) = -z_a \; ; \; a = 1,2,\dots,m \qquad (3.2.1)$$

واذا أخذنا بعين الاعتبار تعريف مصفوفة التتالي (2.1.1) يمكن كتابة (3.2.1) بالشكل :

$$\sum_{i=0}^{n} s_{ia}(R_i + c_{ia}) = s_{0a}R_0 + s_{0a}c_{0a} + \sum_{i=1}^{n} s_{ia}(R_i + c_{ia}) = -z_a \qquad ; \; a = 1,\dots,m$$

وبما أن $R_0 = 0$ فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل:

$$\sum_{i=0}^{n} s_{ia}(R_i + c_{ia}) = s_{0a}c_{0a} + \sum_{i=1}^{n} s_{ia}(R_i + c_{ia}) = -z_a;\ a = 1, \dots, m \qquad (3.2.2)$$

ولنعرف الآن المصفوفة التالية ، بمساعدة مصفوفة التتالي :

$$\underline{J} = (s_{ia}c_{ia})\ (i = 0,1, \dots, n; a = 1,2, \dots, m) \qquad (3.2.3)$$

حيث تتعين المتجهات c_{ia} من أجل $i = i^{\pm}(a)$ فقط . وسنضع فيما عدا ذلك هذه المتجهات مساوية للصفر . وتملك المصفوفة (3.2.3) نفس تركيب مصفوفة التتالي :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{c}}_0 & \underline{\hat{c}}_0 \\ \underline{\breve{c}} & \underline{\hat{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_0 \\ \underline{c} \end{bmatrix} \qquad (3.2.4)$$

حيث:

$$\underline{\breve{c}}_0 = (s_{0a}c_{0a})(a = 1,2, \dots, n); \underline{\hat{c}}_0 = (s_{0a}c_{0a})(a = n + 1,2, \dots, m)$$

$$\underline{\breve{c}} = (s_{ia}c_{ia})(i, a = 1, \dots, n);\ \underline{\hat{c}} = (s_{ia}c_{ia})(i = 1, \dots, n; a = n + 1, \dots, m)$$

$$\underline{c}_0 = (s_{0a}c_{0a})(a = 1, \dots, m)\ ;\ \underline{c} = (s_{ia}c_{ia})(i = 1,2, \dots, n; a = 1,2, \dots, m)$$

وبنفس الطريقة نعرف المصفوفة :

$$\underline{J}^* = (s_{ia}^{+}\ z_a)\ (i = 0,1, \dots, n; a = 1,2, \dots, m) \qquad (3.2.5)$$

حيث القيم s_{ia}^{+} معرفة في (2.1.2) . تملك المصفوفة (3.2.5) الشكل :

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} \underline{\breve{c}}_0{}^* & \underline{\hat{c}}_0{}^* \\ \underline{\breve{c}}^* & \underline{\hat{c}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_0{}^* \\ \underline{c}^* \end{bmatrix} \qquad (3.2.6)$$

حيث:

$$\underline{\breve{c}}_0{}^* = (s_{0a}^{+}z_a)(a = 1,2, \dots, n); \underline{\hat{c}}_0{}^* = (s_{0a}^{+}z_a)(a = n + 1,2, \dots, m)$$

$$\underline{\breve{c}}^* = (s_{ia}^{+}z_a)(i, a = 1, \dots, n);\ \underline{\hat{c}}^* = (s_{ia}^{+}z_a)(i = 1, \dots, n; a = n + 1, \dots, m)$$

$$\underline{c}_0{}^* = (s_{0a}^{+}z_a)(a = 1, \dots, m)\ ;\ \underline{c}^* = (s_{ia}^{+}z_a)(i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, m)$$

كما يمكن كتابة المتجه z_a بالشكل :

$$z_a = \sum_{i=0}^{n} s_{ia}^{+} z_a$$

ومنه نجد من أجل المصفوفة $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_m)^T$:

$$\underline{z} = \left(\underline{J}^*\right)^T \underline{1}_{n+1}$$

حيث $\underline{1}_{n+1}$ هي مصفوفة عمود من المرتبة $[(n+1) \times 1]$ ، جميع عناصرها تأخذ القيمة الواحدية . و إذا استخدمنا الرمز $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_n)^T$ فإن العلاقة (3.2.2) تكتب بالشكل :

$$\underline{I}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R} \end{bmatrix} + \underline{J}^T \underline{1}_{n+1} = -\underline{z} \qquad (3.2.7)$$

وباستخدام (3.2.4) و(3.2.6) فالصيغة (3.2.7) تأخذ الشكل :

$$\underline{I}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R} \end{bmatrix} + \left(\underline{J} + \underline{J}^*\right)^T \underline{1}_{n+1} = \underline{0}_{m\times 1} \qquad (3.2.8)$$

ولو ضربنا طرفي العلاقة (3.2.8) من اليسار بـ $\underline{\Psi}^T$ و بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة [24] :

$$\underline{\Psi}^T \underline{I}^T = \left(-1_n, \underline{E}_n\right) \qquad (3.2.9)$$

فتؤول العلاقة (3.2.8) ، إلى العلاقة :

$$\underline{R} = -\underline{\Psi}^T \left(\underline{J} + \underline{J}^*\right)^T \underline{1}_{n+1} \qquad (3.2.10)$$

وتُعرف الصيغة (3.2.10) نصف القطر المتجهي $R_i (i = 1,2, \ldots, n)$ للنقاط C_i المثبتة من الأجسام بالنسبة للجملة الإحداثية المطلقة من خلال المتجهات المفصلية وبالتالي من خلال الإحداثيات المعممة . ويمكن ودون المس بعمومية المسألة ، وضع $C_0 = C_1$ وعندئذ $c_{01} = 0$. ونختار للجسم الخاص (المميز) الرمز R_{i^*} ، فإن العلاقة :

$$R_{i^*} = \sum_{i=1}^{i^*} z_i + \sum_{i=1}^{i^*-1} \left(c_{i,i+1} - c_{ii}\right) \qquad (3.2.11)$$

تعبر عن نصف القطر المتجهي للنقطة C_{i^*} من الجسم الخاص بالنسبة للجملة الإحداثية المطلقة .

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أن المتجهات c_{ia} ، من أجل الآلتين نفسهم تماماً ويعود الفرق في المواضع للقيم المختلفة للمتجهات z_a (z_a^r لحالة المفاصل الدورانية و z_a لحالة المفاصل عالية المرونة) فيمكننا كتابة (3.2.11) بالشكل :

$$\Delta R_{i^*} = \sum_{i=1}^{i^*} \Delta z_i \qquad (3.2.12)$$

وهي تعبر عن انزياح النقطة الخاصة (المميزة) [7].

لنطبق العلاقات (3.2.4) ، (3.2.6) و (3.2.10) على الآلات المذكورة أعلاه . فتأخذ كل من $\underline{J}$ و $\underline{J}^*$ (العلاقتان (3.2.4) و (3.2.6))، أشكالاً جديدة توافق الحالات التالية:

1. من أجل منظومة مولدة بآلة رباعية واحدة:

تملك كل من $\underline{J}$ و $\underline{J}^*$ (العلاقتان (3.2.4) و (3.2.6)) الشكل التالي:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & c_{03} & 0 \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & 0 & -c_{24} \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{bmatrix}$$

وتأخذ العلاقة (3.2.10) لهذه الآلة الشكل:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + c_{01} - c_{11} \\ z_1 + z_2 + c_{01} + c_{12} - c_{11} - c_{22} \\ z_3 + c_{03} - c_{33} \end{bmatrix}$$

ويعطى نصف القطر المتجهي R_c للنقطة المميزة C الشكل $(2-2-2)$ بالعلاقة:

$$R_c = R_2 + r_3 e_1^{(2)}$$

أو بالعلاقة:

$$\Delta R_c = \Delta R_2 = \Delta z_1 + \Delta z_2$$

2. من أجل منظومة مولدة بآلتين رباعيتين:

الحالة الاولى:

حالة وصلة ثنائية المفصل:

تملك كل من $\underline{J}$ و $\underline{J}^*$ (العلاقتان (3.2.4) و (3.2.6)) الشكل التالي:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{08} & c_{09} & c_{0,10} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & -c_{38} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & -c_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & 0 & 0 & -c_{7,10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & z_9 & z_{10} \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتأخذ العلاقة (3.2.10) لهذه الآلة الشكل:

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \end{bmatrix}
$$

ويعطى نصف القطر المتجهي R_c للنقطة المميزة C الشكل $(5-2-2)$ بالعلاقة:

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

أو بالعلاقة :

$$\Delta R_c = \Delta R_2 = \Delta z_1 + \Delta z_2$$

<u>الحالة الثانية :</u>

حالة وصلة أحادية المفصل:

تملك كل من $\underline{J}$ و $\underline{J}^*$ (العلاقتان (3.2.4) و (3.2.6)) الشكل التالي:

$$
\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{07} & c_{08} & c_{09} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & -c_{37} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & -c_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & 0 & 0 & -c_{69} \end{bmatrix}
$$

$$
\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & z_8 & z_9 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

وتأخذ العلاقة (3.2.10) لهذه الآلة الشكل:

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \end{bmatrix}
$$

ويعطى نصف القطر المتجهي R_c للنقطة المميزة C الشكل $(8-2-2)$ بالعلاقة:

$$
R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}
$$

أو بالعلاقة:

$$
\Delta R_c = \Delta R_2 = \Delta z_1 + \Delta z_2
$$

3. من أجل منظومة مولدة بثلاث الآت رباعية:

<u>الحالة الاولى:</u>

حالة وصلة ثنائية المفصل:

تملك كل من $\underline{J}$ و $\underline{J}^*$ (العلاقتان (3.2.4) و (3.2.6)) الشكل التالي:

$$\underline{J}=\begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,12} & c_{0,13} & c_{0,14} & c_{0,15} & c_{0,16} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{3,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{5,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & c_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{7,14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{88} & c_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{99} & c_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{9,15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{10,10} & c_{10,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{11,16} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^*=\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتأخذ العلاقة (3.2.10) لهذه الآلة الشكل:

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{8} z_i - \sum_{i=1}^{8} c_{ii} + \sum_{i=1}^{8} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{9} z_i - \sum_{i=1}^{9} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{10} z_i - \sum_{i=1}^{10} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} + c_{1.10} \\ \sum_{i=1}^{11} z_i - \sum_{i=1}^{11} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} + c_{1.10} + c_{10.11} \end{bmatrix}
$$

ويعطى نصف القطر المتجهي R_c للنقطة المميزة C الشكل $(11-2-2)$ بالعلاقة:

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

أو بالعلاقة :

$$\Delta R_c = \Delta R_2 = \Delta z_1 + \Delta z_2$$

الحالة الثانية :

حالة وصلة أحادية المفصل:

تملك كل من $\underline{J}$ و $\underline{J}^*$ (العلاقتان (3.2.4) و (3.2.6)) الشكل التالي:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,10} & c_{0,11} & c_{0,12} & c_{0,13} & c_{0,14} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{3,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{4,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{6,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & c_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{7,13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{88} & c_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{9,14} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتأخذ العلاقة (3.2.10) لهذه الآلة الشكل:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{8} z_i - \sum_{i=1}^{8} c_{ii} + \sum_{i=1}^{8} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{9} z_i - \sum_{i=1}^{9} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} \end{bmatrix}$$

ويعطى نصف القطر المتجهي R_c للنقطة المميزة C الشكل $(14 - 2 - 2)$ بالعلاقة:

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

أوبالعلاقة :

$$\Delta R_c = \Delta R_2 = \Delta z_1 + \Delta z_2$$



معادلات القيود لمنظومة مستوية مولدة بالآلة الرباعية

4. معادلات القيود لمنظومة مستوية مولدة بالآلة الرباعية

4.1. معادلات القيود:

إن توفر الطرق المغلقة في الجملة المعتبرة ، يقود إلى ظهور علاقات بين الإحداثيات المعممة q_a ، وهذا ناتج عن التأثير المتبادل للأجسام ،و إن هذه القيود هي بالضبط تتمثل بالحلقات الأساسية المغلقة ، إذ تُوفر كل من هذه الحلقات الأساسية ثلاث علاقات سلمية ومستقلة عن باقي الحلقات [7]. وتُعبر هذه العلاقات عن فضاء بديهي ، وهو أن نصف القطر المتجهي لمبدأ أي جملة إحداثية متماسكة مع جسم من أجسام حلقة من الحلقات ، بالنسبة لهذا المبدأ هو المتجه الصفري ، وكذلك فإن الوضع الزاوي لهذه الجمل بالنسبة لنفس الجملة يعطي المصفوفة الواحدية . ولو انطلقنا من أي جسم لأي حلقة معبرين عن هذا الطريق المسلوك باستخدام الجمل الإحداثية وهكذا تتابعاً لجميع الأجسام ، نجد تسجيل ووصف رسمي للعلاقات بعد إغلاق الحلقة ،الآن حتى نناقش الوضع الزاوي في حلقة ما من هذه الحلقات الأساسية . نأخذ الحلقة المغلقة Φ_a التي تتألف من الأقواس $(a = n + 1, \dots, m)$ $u_{b_1}, \dots, u_{b_a};$ علماً أننا نعتبر جهة الدوران فيها مأخوذة بجهة القوس u_{b_a} . ولنفرض أنّ i و j الجسمين المتجاورين على طرفي المفصل b_k و α هي الزاوية بين محوري الفواصل للجملتين المتماسكتين مع الجسمين اللذين هما طرفا المفصل المعتبر .

يتضح مباشرةً أن اختيار الجسم ذو الرقم i كقاعدة يؤدي إلى أن الزاوية q_{b_k} تملك القيمة α ، وعند اختيار الجسم j كقاعدة (كجسم ثابت في الحركة النسبية) فقيمة الزاوية q_{b_k} تصبح $(-\alpha)$ ويكون لدينا على طول الحلقة ، ابتداءاً من أي جسم ، ما يلي :

$$q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_1}} = q_{k_1} + q_{k_2} + \cdots + q_{k_{n_2}} \qquad (4.1)$$

حيث $j_1, \dots, j_{n_1}$ أرقام الأقواس ذات الاتجاه u_{b_a} ، بينما $k_1, \dots, k_{n_2}$ أرقام الأقواس المعاكسة لاتجاه هذه الاقواس . هذا و يمكن التوصل لهذه النتيجة بطريقة تحليلية أيضاً .

لنأخذ $\underline{G}_{b_k}$ مصفوفة الانتقال في المفصل b_k على اعتبار أن الجسم i قاعدة ، وإن الوسيط q_{b_k} يأخذ القيمة α وتملك المصفوفة $\underline{G}_{b_k}$ الشكل :

$$\underline{G}_{b_k} = \underline{e}^{(i)}.\underline{e}^{(j)^T} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

اما اذا اعتبرنا الجسم j قاعدة ، فقيمة الزاوية q_{b_k} تصبح $(-\alpha)$ ومصفوفة الانتقال في هذه الحالة تصبح $\underline{G}_{b_k}^T$.

وإذا ما عدنا الى (2.1.4) (تعريف القيم φ_{ab}) يمكننا أن نكتب ما يلي [7]:

$$\underline{G}_{b_1}^{\varphi_{ab_1}}, \underline{G}_{b_2}^{\varphi_{ab_2}}, \dots, \underline{G}_{b_a}^{\varphi_{ab_a}} = \underline{E_2}\ ; (a = n+1, \dots, m) \qquad (4.3)$$

و كل مصفوفة من هذه المصفوفات تكون متناظرة عكسياً . وكما نعلم أنه يمكننا المبادلة في الجداء لمصفوفتين متناظرتين عكسياً ولهذا نكتب:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

وهذا يقود إلى أن الجداء اليساري للعلاقة (4.3) يكتب كجزأين الأول بأدلة موجبة φ_{ab} ، والثاني بأدلة سالبة ، ويؤول الجزء الأول من هذا الجداء إلى الشكل :

$$\begin{bmatrix} cos(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_1}}) & -sin(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_1}}) \\ sin(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_1}}) & cos(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_1}}) \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

والثاني:

$$\begin{bmatrix} cos(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_2}}) & -sin(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_2}}) \\ sin(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_2}}) & cos(q_{j_1} + q_{j_2} + \cdots + q_{j_{n_2}}) \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

حيث $j_1, \dots, j_{n_1}$ أرقام الأقواس ذات الاتجاه u_{b_a} ، بينما $k_1, \dots, k_{n_2}$ أرقام الأقواس المعاكسة لاتجاه هذه الاقواس كما سبق ، ونجد بعد ضرب المصفوفات (4.4) و (4.5) ، فإن (4.3) تأخذ بالشكل :

$$\begin{bmatrix} cos\left[\left(q_{j_1} + \cdots + q_{j_{n_1}}\right) - \left(q_{k_1} + \cdots + q_{k_{n_2}}\right)\right] & -sin\left[\left(q_{j_1} + \cdots + q_{j_{n_1}}\right) - \left(q_{k_1} + \cdots + q_{k_{n_2}}\right)\right] \\ \sin\left[\left(q_{j_1} + \cdots + q_{j_{n_1}}\right) - \left(q_{k_1} + \cdots + q_{k_{n_2}}\right)\right] & cos\left[\left(q_{j_1} + \cdots + q_{j_{n_1}}\right) - \left(q_{k_1} + \cdots + q_{k_{n_2}}\right)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي نفس النتيجة السابقة (4.1) .

ويمكن التعبير عن العلاقتين المتبقيتين بأن نجعل نصف القطر المتجهي لمبدأ أي جسم مختار بالنسبة لنفسه مساوياً الصفر وبكلام أخر أن يكون نصف القطر المتجهي لمبدأ الجسم الابتدائي المعبر عنه بالمتجهات z_a و $c_{i\pm(a)a}$ تماشياً مع الأقواس u_a ، معدوماً .

ولنضرب الآن العلاقة (3.2.8) من اليسار بمصفوفة الحلقات الأساسية $\underline{\Phi}$ وبالاستفادة من العلاقة (1.3.7) من المرجع [6] ، نجد :

$$\underline{\Phi}\left(\underline{J}+\underline{J}^{*}\right)^{T}\underline{1}_{n+1}=\underline{0}_{\hat{n}\times 1} \qquad (4.6)$$

وعندما نسقط طرفي العلاقة (4.6) على مستوي الحركة ، نحصل على $2\hat{n}$ علاقة سلمية وتشكل جميعها مع العلاقة (4.1) ، معادلات القيود .

إذا استفدنا من العلاقة(4.9) الواردة في المرجع [6] فيمكننا كتابة (4.6) بالشكل :

$$\underline{\Phi}\ \underline{J}^{T}\underline{1}_{n+1}+\ \underline{\Phi}\ \ \underline{z}=\underline{0}_{\hat{n}\times 1}$$

تصلح هذه العلاقة لكلا الآلتين ، ولهذا فان :

$$\underline{\Phi}\left(\underline{J}-\underline{J}^{r}\right)^{T}\underline{1}_{n+1}+\underline{\Phi}\ \ \Delta\underline{z}=\underline{0}_{\hat{n}\times 1}$$

تملك المتجهات c_{ia} نفس القيم في كلا الآلتين ، أي : $\underline{J}=\underline{J}^{r}$ ومنه فإن :

$$\underline{\Phi}\ \ \Delta\underline{z}=\underline{0}_{\hat{n}\times 1} \qquad (4.7)$$

إن تعين متجه الخطأ لموضع النقطة المميزة (الخاصة) يعطي إمكانية حل مسألة التراكيب والدمج في أبحاث أخرى : وسطاء الآلات المرنة كالطول مثلا l_a ، أوضاع العناصر المرنة في وضع ما قبل التشوه من خلال الزوايا $\alpha_a^{\pm}$ ، q_a^{*} ويتم تعينهم بحيث يكون متجه الخطأ أقل ما يمكن ، على سبيل المثال أن يكون أقل ما يمكن بالقيمة المطلقة .

تبحث مسألة الخطأ الأمثل عند الشروط :

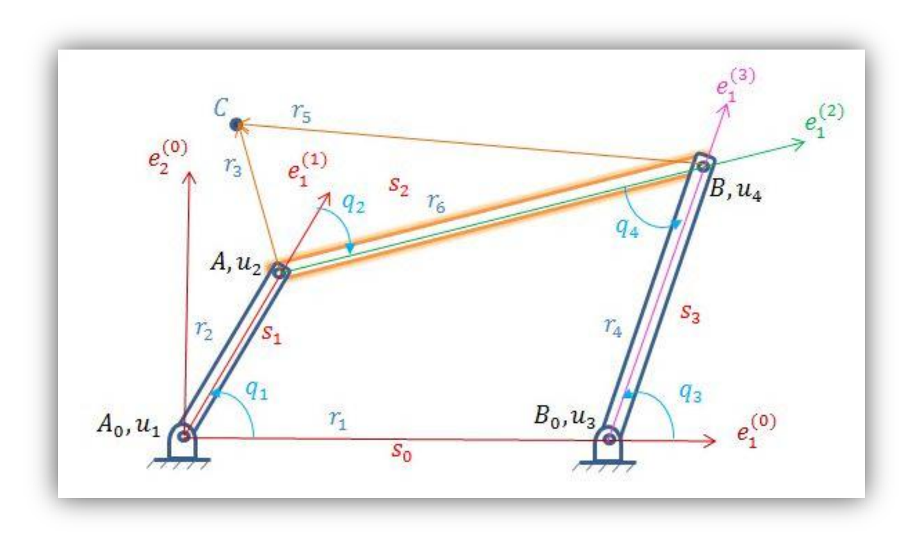
$$|\theta_a|\leq\theta_{a\,max}$$

حيث يتم تحديد القيمة $\theta_{a\,max}$ من جعل العزم المسبب للانحناء يأخذ قيمة أعظمية والذي بدوره يؤثر على المفصل المرن a ، توجد الكثير من الطرق لحل هذه المسألة ، والذي لسنا بصدده في هذا البحث .

لنطبق الآن النتائج السابقة على الآلات التي تعرفنا عليها سابقاً .

4.2. الآلة المولدة بآلة رباعية وحيدة:

تملك هذه الآلة الإحداثيات المعممة التالية q_3, q_2, q_1 و q_4 وكما في الشكل $(4-1)$ ، و هذه الوسطاء ليست مستقلة بل يوجد بينها ارتباطات لتوفر طريق مغلق واحد معين بالقوس u_4 .



الشكل $(4-1)$

إن العلاقة (4.1) من أجل الطريق (OA_0ABB_0) والموافق للقوس u_4 و اعتماداً على المصفوفة $[1 \quad 1 \quad -1 \quad 1] = \underline{\Phi}$ تملك الشكل:

$$q_1 + q_2 - q_3 + q_4 = 0 \tag{4.8}$$

ومن الشكل $(4-1)$ و بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور الترتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} r_2 cos(q_1) + r_6 cos(q_1+q_2) - r_4 cos(q_3) - r_1 = 0 \\ r_2 sin(q_1) + r_6 sin(q_1+q_2) - r_4 sin(q_3) \qquad = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

نلاحظ أنه لدينا في هذه الآلة أربع إحداثيات معممة هي q_3, q_2, q_1 و q_4 لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد يحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط

مستقل وحيد لهذه الآلة وليكن q_1 و لذلك يجب حساب $q_2 = q_2(q_1)$ ، $q_3 = q_3(q_1)$ و $q_4 = q_4(q_1)$ وهذا يتم كما يلي:

ننسب العلاقتين (4.9) فنحصل على :

$$\frac{r_4 sin(q_3)}{r_4 cos(q_3)} = \frac{r_2 sin(q_1) + r_6 sin(q_1 + q_2)}{r_2 cos(q_1) + r_6 cos(q_1 + q_2) - r_1}$$

ومنه نحصل على :

$$q_3 = \arctan\left(\frac{r_2 sin(q_1) + r_6 sin(q_1 + q_2)}{r_2 cos(q_1) + r_6 cos(q_1 + q_2) - r_1}\right) \qquad (4.10)$$

وهذا يعني أن $q_3 = g(q_1, q_2)$ إذاً لإزالة q_2 يجب علينا حساب q_2 بدلالة q_1 عندئذ تكون q_3 تتبع فقط لـ q_1 .

نربعّ العلاقات (4.9) ونجمع النواتج طرفاً إلى طرف نجد:

$$(r_2 cos(q_1) + r_6 cos(q_1 + q_2) - r_1)^2 = {r_4}^2 cos^2(q_3)$$

$$\big(r_2 sin(q_1) + r_6 sin(q_1 + q_2)\big)^2 \qquad = {r_4}^2 sin^2(q_3)$$

+ ―――――――――――――――――――――――――――――

$$\begin{aligned} &{r_2}^2 cos^2(q_1) + {r_1}^2 - 2 r_2 r_1 cos(q_1) + {r_6}^2 cos^2(q_1 + q_2) \\ &+ 2 r_2 r_6 cos(q_1 + q_2) cos(q_1) - 2 r_6 r_1 cos(q_1 + q_2) + {r_2}^2 sin^2(q_1) \\ &+ {r_6}^2 sin^2(q_1 + q_2) + 2 r_6 r_2 sin(q_1) sin(q_1 + q_2) \quad = {r_4}^2 \end{aligned}$$

وهكذا نحصل على :

$$\begin{aligned} {r_4}^2 - ({r_1}^2 + {r_2}^2 {r_6}^2) = &\, 2 r_6 r_2 \big(cos(q_1 + q_2) cos(q_1) + sin(q_1) sin(q_1 + q_2)\big) \\ &- 2 r_2 r_1 cos(q_1) - 2 r_6 r_1 cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${r_4}^2 - ({r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_6}^2) = 2 r_6 r_2 cos(q_2) - 2 r_2 r_1 cos(q_1) - 2 r_6 r_1 cos(q_1 + q_2)$$

وهنا تبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_1 و q_2 من الشكل :

$$L(q_1, q_2) = 0 \implies q_2 = M(q_1)$$

وهذا يعني ان q_2 تتبع لـ q_1. نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_3 = g(q_1, q_2)$ نجد أن :

$$q_3 = g(q_1, q_2) = g(q_1, M(q_1)) = \mathrm{Z}(q_1)$$

وهذا يعني أن q_3 تتبع لـ q_1 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.8) نجد أن :

$$q_4 = q_3 - q_1 - q_2 = f(q_1, q_2, q_3) = f\big(q_1, M(q_1), \mathrm{Z}(q_1)\big) = K(q_1)$$

وهذا يعني ان q_4 تتبع لـ q_1 ، فالحركة لكامل الآلة تتعين بدلالة الوسيط q_1 .

نلاحظ ان العلاقة (4.7) تأخذ الشكل :

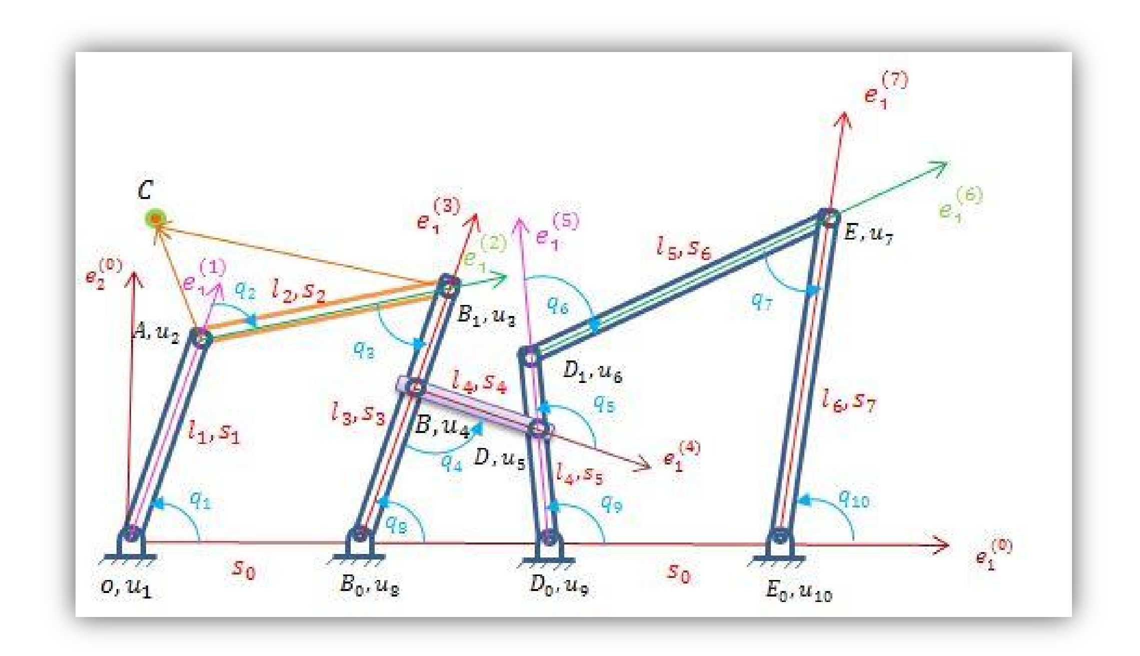
$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix} = 0$$

أو :

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 - \Delta z_3 + \Delta z_4 = 0$$

4.3. الآلة المولدة بآلتين رباعيتين:

تملك هذه الآلة الإحداثيات المعممة التالية $q_9, q_8, q_7, q_6, q_5, q_4, q_3, q_2, q_1$ و q_{10} والمبينة في الشكل $(2-4)$ ، أن هذه الوسطاء ليست مستقلة بل يوجد بينها ارتباطات لتوفر ثلاث طرق مغلقة و معينة بالأقواس u_9, u_8 و u_{10}.



الشكل $(2-4)$

وإذا اعتمادنا على المصفوفة:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل:

$$\begin{cases} q_8 - q_3 - q_2 - q_1 = 0 \\ q_9 - q_8 - q_5 - q_4 = 0 \\ q_{10} - q_9 - q_7 - q_6 = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

لنبدأ بالطريق المغلق (OAB_1B_0) و الموافق للقوس u_8 ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل:

$$q_8 - q_3 - q_2 - q_1 = 0 \quad (4.11)$$

ومن الشكل $(2-4)$ بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور التراتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_1cos(q_1) + l_2cos(q_1+q_2) - l_3cos(q_8) - a = 0 \\ l_1sin(q_1) + l_2sin(q_1+q_2) - l_3sin(q_8) \quad\quad = 0 \end{cases} ; a = |OB_0| \quad (4.12)$$

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_3, q_2, q_1 و q_8 لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد يحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_1 لذلك يجب حساب $q_2 = q_2(q_1)$ ، $q_3 = q_3(q_1)$ و $q_8 = q_8(q_1)$ وذلك على الشكل التالي:

ننسب العلاقتين (4.12) فنحصل على :

$$\frac{l_3 sin(q_8)}{l_3 cos(q_8)} = \frac{l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2)}{l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - a}$$

ومنه نحصل على :

$$q_8 = \arctan\left(\frac{l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2)}{l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - a}\right) \qquad (4.13)$$

وهذا يعني أن $q_8 = g(q_1, q_2)$ إذاً لإزالة q_2 يجب علينا حساب q_2 بدلالة q_1 عندئذ تكون q_8 تتبع فقط لـ q_1 . ولهذا نربع العلاقات (4.12) و نجمع النواتج طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - a)^2 = {l_3}^2 cos^2(q_8)$$

$$\left(l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2)\right)^2 \qquad = {l_3}^2 sin^2(q_8)$$

$+$ ______________________________________

$${l_1}^2 cos^2(q_1) + a^2 - 2a l_1 cos(q_1) + {l_2}^2 cos^2(q_1 + q_2)$$
$$+2 l_2 l_1 cos(q_1 + q_2) cos(q_1) - 2 l_2 a\, cos(q_1 + q_2) + {l_1}^2 sin^2(q_1)$$
$$+{l_2}^2 sin^2(q_1 + q_2) + 2 l_2 l_1 sin(q_1) sin(q_1 + q_2) \qquad = {l_3}^2$$

فنحصل على :

$${l_3}^2 - \left({l_1}^2 + {l_2}^2 + a^2\right) = 2 l_2 l_1 \left(cos(q_1 + q_2) cos(q_1) + sin(q_1) sin(q_1 + q_2)\right)$$
$$-2a l_1 cos(q_1) - 2 l_2 a\, cos(q_1 + q_2)$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_3}^2 - \left({l_1}^2 + {l_2}^2 + a^2\right) = 2 l_2 l_1 cos(q_2) - 2a l_1 cos(q_1) - 2 l_2 a\, cos(q_1 + q_2)$$

وتبين العلاقة الاخيرة وجود علاقة بين q_1 و q_2 من الشكل :

$$L(q_1, q_2) = 0 \implies q_2 = M(q_1)$$

وهذا يعني أن q_2 تتبع لـ q_1.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_8 = g(q_1, q_2)$ نجد أن :

$$q_8 = g(q_1, q_2) = g(q_1, M(q_1)) = \mathrm{Z}(q_1)$$

وهذا يعني أن q_8 تتبع لـ q_1 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.11) نجد أن :

$$q_3 = q_8 - q_1 - q_2 = f(q_1, q_2, q_8) = f\big(q_1, M(q_1), \mathrm{Z}(q_1)\big) = K(q_1)$$

وهذا يعني أن q_3 تتبع لـ q_1 .

ومن أجل الطريق المغلق (B_0BDD_0) و الموافق للقوس u_9 ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_9 - q_8 - q_5 - q_4 = 0 \qquad (4.14)$$

ومن الشكل $(2-4)$ و بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور التراتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_8cos(q_8) + l_4cos(q_8 + q_4) - l_9cos(q_9) - b = 0 \\ l_8sin(q_8) + l_4sin(q_8 + q_4) - l_9sin(q_9) \qquad = 0 \end{cases} \qquad (4.15)$$

حيث أن $b = |D_0B_0|$ و $l_8 = |B_0B|$ و $l_9 = |D_0D|$.

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_8, q_5, q_4 و q_9 لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد تحذف وسيطاً منها و بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_8 لذلك يجب حساب $q_4 = q_4(q_8)$ ، $q_5 = q_5(q_8)$ و $q_9 = q_9(q_8)$ ، ثم من تبعية q_8 لـ q_1 يكون كل ما سبق من إحداثيات تابعاً لـ q_1 ، وذلك على الشكل التالي:

بنسب العلاقتين (4.15) نحصل على :

$$\frac{l_9sin(q_9)}{l_9cos(q_9)} = \frac{l_8sin(q_8) + l_4sin(q_8 + q_4)}{l_8cos(q_8) + l_4cos(q_8 + q_4) - b}$$

ومنه نحصل على :

$$q_9 = \arctan\left(\frac{l_8 sin(q_8) + l_4 sin(q_8 + q_4)}{l_8 cos(q_8) + l_4 cos(q_8 + q_4) - b}\right) \tag{4.16}$$

وهذا يعني أن $q_9 = g(q_8, q_4)$ إذاً لإزالة q_4 يجب علينا حساب q_4 بدلالة q_8 عندئذ تكون q_4 تتبع فقط لـ q_8 . نربع العلاقات (4.15) ونجمع النواتج طرفاً إلى طرف نجد:

$$(l_8 cos(q_8) + l_4 cos(q_8 + q_4) - b)^2 = {l_9}^2 cos^2(q_9)$$

$$\left(l_8 sin(q_8) + l_4 sin(q_8 + q_4)\right)^2 \qquad = {l_9}^2 sin^2(q_9)$$

+ ______________________________

$$\begin{aligned} &{l_8}^2 cos^2(q_8) + b^2 - 2bl_8 cos(q_8) + {l_4}^2 cos^2(q_8 + q_4) \\ &+2l_8 l_4 cos(q_8 + q_4) cos(q_8) - 2l_4 b\, cos(q_8 + q_4) + {l_8}^2 sin^2(q_8) \\ &+{l_4}^2 sin^2(q_8 + q_4) + 2l_8 l_4 sin(q_8) sin(q_8 + q_4) = {l_9}^2 \end{aligned}$$

ومنه نحصل على :

$$\begin{aligned} {l_9}^2 - \left({l_8}^2 + {l_4}^2 + b^2\right) = 2l_8 l_4 \left(cos(q_8 + q_4) cos(q_8) + sin(q_8) sin(q_8 + q_4)\right) \\ -2bl_8 cos(q_8) - 2l_4 b\, cos(q_8 + q_4) \end{aligned}$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_9}^2 - \left({l_8}^2 + {l_4}^2 + b^2\right) = 2l_8 l_4 cos(q_4) - 2bl_8 cos(q_8) - 2l_4 b\, cos(q_8 + q_4)$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_4 و q_8 من الشكل :

$$L(q_8, q_4) = 0 \implies q_4 = M(q_8)$$

وهذا يعني أن q_4 تتبع لـ q_8.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_9 = g(q_8, q_4)$ نجد أن :

$$q_9 = g(q_8, q_4) = g(q_8, M(q_8)) = \mathrm{Z}(q_8)$$

وهذا يعني أن q_9 تتبع لـ q_8 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.14) نجد أن :

$$q_5 = q_9 - q_8 - q_4 = f(q_8, q_4, q_9) = f(q_8, M(q_8), \mathrm{Z}(q_8)) = K(q_8)$$

وهذا يعني أن q_5 تتبع لـ q_8 ، وكذلك من تبعية q_8 لـ q_1 فإن كل من q_9, q_5, q_4 يتبع لـ q_1 .

ومن أجل الطريق المغلق $(D_0D_1EE_0)$ و الموافق للقوس u_{10} ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_{10} - q_9 - q_7 - q_6 = 0 \tag{4.17}$$

ومن الشكل $(2-4)$ و بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور الترتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_4cos(q_9) + l_5cos(q_9+q_6) - l_6cos(q_{10}) - c = 0 \\ l_4sin(q_9) + l_5sin(q_9+q_6) - l_6sin(q_{10}) \qquad = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

حيث أن $c = |D_0E_0|$.

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_9, q_7, q_6 و q_{10} لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد يحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_9.

ولذلك يجب حساب $q_6 = q_6(q_9)$ ، $q_7 = q_7(q_9)$ و $q_{10} = q_{10}(q_9)$ ، ثم من تبعية q_9 لـ q_1 يكون كل ما سبق من إحداثيات تابعاً لـ q_1 ، وذلك على الشكل التالي:

ننسب العلاقتين (4.18) فنحصل على :

$$\frac{l_6sin(q_{10})}{l_6cos(q_{10})} = \frac{l_4sin(q_9) + l_5sin(q_9+q_6)}{l_4cos(q_9) + l_5cos(q_9+q_6) - c}$$

ومنه نحصل على :

$$q_{10} = \arctan\left(\frac{l_4sin(q_9) + l_5sin(q_9+q_6)}{l_4cos(q_9) + l_5cos(q_9+q_6) - c}\right) \tag{4.19}$$

وهذا يعني أن $q_{10} = g(q_9, q_6)$ إذاً لإزالة q_6 يجب علينا حساب q_6 بدلالة q_8 عندئذ تكون q_6 تتبع فقط لـ q_9 .

بتربيع العلاقات (4.18) والجمع طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_4cos(q_9) + l_5cos(q_9+q_6) - c)^2 = {l_6}^2cos^2(q_{10})$$

$$\left(l_4 sin(q_9) + l_5 sin(q_9+q_6)\right)^2 \qquad = {l_6}^2 sin^2(q_{10})$$

+

$${l_4}^2 cos^2(q_9) + c^2 - 2cl_4 cos(q_9) + {l_5}^2 cos^2(q_9+q_6)$$
$$+2l_5 l_4 cos(q_9+q_6) cos(q_9) - 2l_5 c\, cos(q_9+q_6) + {l_4}^2 sin^2(q_9)$$
$$+{l_5}^2 sin^2(q_9+q_6) + 2l_5 l_4 sin(q_9) sin(q_9+q_6) = {l_6}^2$$

ومنه نحصل على :

$${l_6}^2 - \left({l_5}^2 + {l_4}^2 + c^2\right) = 2l_5 l_4 \left(cos(q_9+q_6)cos(q_9) + sin(q_9)sin(q_9+q_6)\right)$$
$$-2cl_4 cos(q_9) - 2l_5 c\, cos(q_9+q_6)$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_6}^2 - \left({l_5}^2 + {l_4}^2 + c^2\right) = 2l_5 l_4 cos(q_6) - 2cl_4 cos(q_9) - 2l_5 c\, cos(q_9+q_6)$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_6 و q_9 من الشكل :

$$L(q_9, q_6) = 0 \implies q_6 = M(q_9)$$

وهذا يعني أن q_6 تتبع لـ q_9.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_{10} = g(q_9, q_6)$ نجد أن :

$$q_{10} = g(q_9, q_6) = g(q_9, M(q_9)) = \mathrm{Z}(q_9)$$

وهذا يعني أن q_{10} تتبع لـ q_9 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.17) نجد أن :

$$q_7 = q_{10} - q_9 - q_6 = f(q_9, q_6, q_{10}) = f(q_8, M(q_9), \mathrm{Z}(q_9)) = K(q_9)$$

وهذا يعني أن q_7 تتبع لـ q_9 ، وكذلك من تبعية q_9 لـ q_1 فإن كل من q_{10}, q_7, q_6 يتبع لـ q_1 .إذاً استناداً إلى ما سبق فإن $q_i = q_i(q_1)\, ; i = 2,3,4,5,6,7,8,9,10$ ، فالحركة لكامل الآلة تعين من خلال الوسيط q_1 . نلاحظ أن العلاقة (4.7) تأخذ الشكل :

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \\ \Delta z_6 \\ \Delta z_7 \\ \Delta z_8 \\ \Delta z_9 \\ \Delta z_{10} \end{bmatrix} = 0$$

أو:

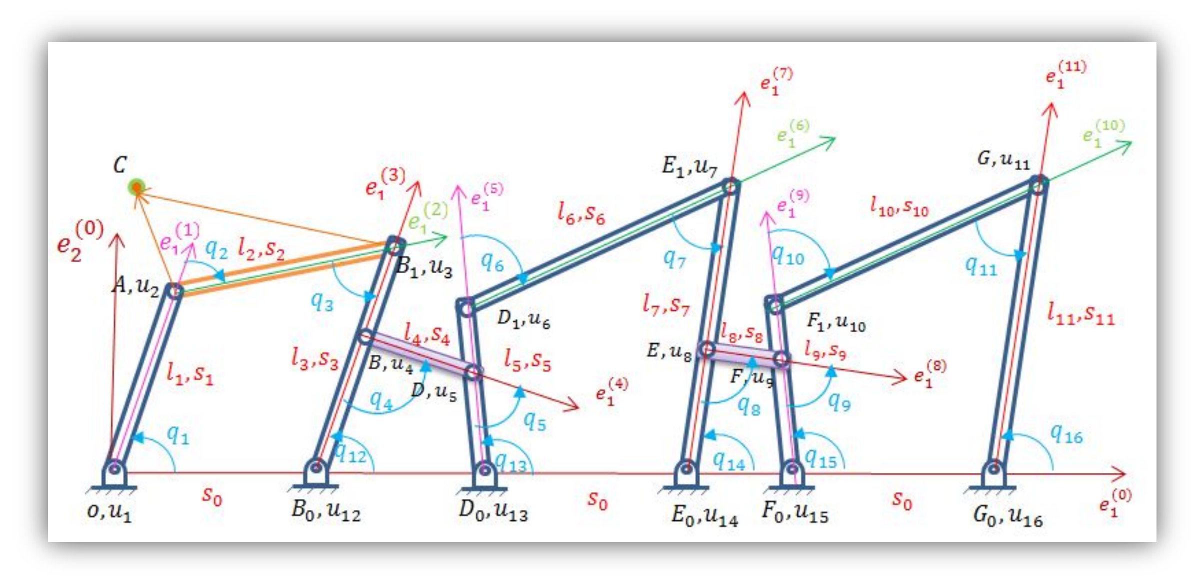
$$\Delta z_{10} - \Delta z_9 - \Delta z_7 - \Delta z_6 = 0$$

$$\Delta z_9 - \Delta z_8 - \Delta z_5 - \Delta z_4 = 0$$

$$\Delta z_8 - \Delta z_3 - \Delta z_2 - \Delta z_1 = 0$$

4.4. الآلة المولدة بثلاث آلات رباعية:

تملك هذه الآلة الإحداثيات المعممة التالية $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots, q_{15}$ و q_{16} والمبينة في الشكل $(3-4)$ ، إن هذه الوسطاء ليست مستقلة بل يوجد بينها ارتباطات لتوفر خمس طرق مغلق معينة بالأقواس $u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}$ و u_{16}.



الشكل $(3-4)$

اعتماداً على المصفوفة:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فإن العلاقة (4.1) تملك الشكل:

$$\begin{cases} q_{12} - q_3 - q_2 - q_1 = 0 \\ q_{13} - q_{12} - q_5 - q_4 = 0 \\ q_{14} - q_{13} - q_7 - q_6 = 0 \\ q_{15} - q_{14} - q_9 - q_8 = 0 \\ q_{16} - q_{15} - q_{11} - q_{10} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

ولنبدأ بالطريق المغلق (OAB_1B_0) و الموافق للقوس u_{12} ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_{12} - q_3 - q_2 - q_1 = 0 \quad (4.21)$$

ومن الشكل $(3-4)$ و بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور التراتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - l_3 cos(q_{12}) - a = 0 \\ l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2) - l_3 sin(q_{12}) = 0 \end{cases} ; a = |OB_0| \quad (4.22)$$

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_3, q_2, q_1 و q_{12} لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد تحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_1 .

لذلك يجب حساب $q_2 = q_2(q_1)$ ، $q_3 = q_3(q_1)$ و $q_{12} = q_{12}(q_1)$ وذلك على الشكل التالي:

بنسب العلاقتين (4.22) نحصل على :

$$\frac{l_3 sin(q_{12})}{l_3 cos(q_{12})} = \frac{l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2)}{l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - a}$$

ومنه نحصل على :

$$q_{12} = \arctan\left(\frac{l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2)}{l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - a}\right) \qquad (4.23)$$

وهذا يعني أن $q_{12} = g(q_1, q_2)$ إذا لإزالة q_2 يجب علينا حساب q_2 بدلالة q_1 عندئذ تكون q_{12} تتبع فقط لـ q_1 .

بتربيع العلاقات (4.22) والجمع طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_1 cos(q_1) + l_2 cos(q_1 + q_2) - a)^2 = {l_3}^2 cos^2(q_{12})$$

$$\left(l_1 sin(q_1) + l_2 sin(q_1 + q_2)\right)^2 \qquad = {l_3}^2 sin^2(q_{12})$$

+ ____

$${l_1}^2 cos^2(q_1) + a^2 - 2al_1 cos(q_1) + {l_2}^2 cos^2(q_1 + q_2)$$
$$+2l_2 l_1 cos(q_1 + q_2) cos(q_1) - 2l_2 a\, cos(q_1 + q_2) + {l_1}^2 sin^2(q_1)$$
$$+{l_2}^2 sin^2(q_1 + q_2) + 2l_2 l_1 sin(q_1) sin(q_1 + q_2) = {l_3}^2$$

ومنه نحصل على :

$${l_3}^2 - \left({l_1}^2 + {l_2}^2 + a^2\right) = 2l_2 l_1\left(cos(q_1 + q_2) cos(q_1) + sin(q_1) sin(q_1 + q_2)\right)$$
$$-2al_1 cos(q_1) - 2l_2 a\, cos(q_1 + q_2)$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_3}^2 - \left({l_1}^2 + {l_2}^2 + a^2\right) = 2l_2 l_1 cos(q_2) - 2al_1 cos(q_1) - 2l_2 a\, cos(q_1 + q_2)$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_1 و q_2 من الشكل :

$$L(q_1, q_2) = 0 \implies q_2 = M(q_1)$$

وهذا يعني أن q_2 تتبع لـ q_1.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_{12} = g(q_1, q_2)$ نجد أن :

$$q_{12} = g(q_1, q_2) = g(q_1, M(q_1)) = \mathrm{Z}(q_1)$$

وهذا يعني أن q_{12} تتبع لـ q_1 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.21) نجد أن :

$$q_3 = q_{12} - q_1 - q_2 = f(q_1, q_2, q_{12}) = f\left(q_1, M(q_1), \mathrm{Z}(q_1)\right) = K(q_1)$$

وهذا يعني أن q_3 تتبع لـ q_1 .

ومن أجل الطريق المغلق (B_0BDD_0) و الموافق للقوس u_{13} ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_{13} - q_{12} - q_5 - q_4 = 0 \qquad (4.24)$$

ومن الشكل $(3-4)$ بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور الترتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_{12}cos(q_{12}) + l_4cos(q_{12}+q_4) - l_{13}cos(q_{13}) - b = 0 \\ l_{12}sin(q_{12}) + l_4sin(q_{12}+q_4) - l_{13}sin(q_{13}) \qquad = 0 \end{cases} \qquad (4.25)$$

حيث أن $b = |D_0B_0|$ و $l_{12} = |B_0B|$ و $l_{13} = |D_0D|$.

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_{12}, q_5, q_4 و q_{13} لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد تحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_{12} لذلك يجب حساب $q_4 = q_4(q_{12})$ ، $q_5 = q_5(q_{12})$ و $q_{13} = q_{13}(q_{12})$ ، ثم من تبعية q_{12} لـ q_1 يكون كل ما سبق من إحداثيات تابعاً لـ q_1 ، وذلك على الشكل التالي:

بنسب العلاقتين (4.25) نحصل على :

$$\frac{l_{13}sin(q_{13})}{l_{13}cos(q_{13})} = \frac{l_{12}sin(q_{12}) + l_4sin(q_{12}+q_4)}{l_{12}cos(q_{12}) + l_4cos(q_{12}+q_4) - b}$$

ومنه نحصل على :

$$q_{13} = \arctan\left(\frac{l_{12}sin(q_{12}) + l_4sin(q_{12}+q_4)}{l_{12}cos(q_{12}) + l_4cos(q_{12}+q_4) - b}\right) \qquad (4.26)$$

وهذا يعني أن $q_{13} = g(q_{12}, q_4)$ إذاً لإزالة q_4 يجب علينا حساب q_4 بدلالة q_{12} عندئذ تكون q_{13} تتبع فقط لـ q_{12} .

بتربيع العلاقات (4.25) والجمع طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_{12}cos(q_{12}) + l_4cos(q_{12}+q_4) - b)^2 = {l_{13}}^2cos^2(q_{13})$$

$$\left(l_{12}sin(q_{12}) + l_4 sin(q_{12}+q_4)\right)^2 \qquad = {l_{13}}^2 sin^2(q_{13})$$

+

$${l_{12}}^2 cos^2(q_{12}) + b^2 - 2bl_{12}cos(q_{12}) + {l_4}^2 cos^2(q_{12}+q_4)$$
$$+2l_4 l_{12} cos(q_{12}+q_4)cos(q_{12}) - 2l_4 b\ cos(q_{12}+q_4) + {l_{12}}^2 sin^2(q_{12})$$
$$+{l_4}^2 sin^2(q_{12}+q_4) + 2l_4 l_{12} sin(q_{12})sin(q_{12}+q_4) = {l_{13}}^2$$

ومنه نحصل على :

$${l_{13}}^2 - \left({l_{12}}^2 + {l_4}^2 + b^2\right) = 2l_4 l_{12}\left(cos(q_{12}+q_4)cos(q_{12}) + sin(q_{12})sin(q_{12}+q_4)\right)$$
$$-2bl_{12}cos(q_{12}) - 2l_4 b\ cos(q_{12}+q_4)$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_{13}}^2 - \left({l_{12}}^2 + {l_4}^2 + b^2\right) = 2l_4 l_{12} cos(q_4) \ - 2bl_{12}cos(q_{12}) - 2l_4 b\ cos(q_{12}+q_4)$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_{12} و q_4 من الشكل :

$$L(q_{12}, q_4) = 0 \ \Longrightarrow \ q_4 = M(q_{12})$$

وهذا يعني أن q_4 تتبع لـ q_{12}.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_{13} = g(q_{12}, q_4)$ نجد أن :

$$q_{13} = g(q_{12}, q_4) = g(q_{12}, M(q_{12})) = \mathrm{Z}(q_{12})$$

وهذا يعني أن q_{13} تتبع لـ q_{12} ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.24) نجد أن :

$$q_5 = q_{13} - q_{12} - q_4 = f(q_{12}, q_4, q_{13}) = f\left(q_{12}, M(q_{12}), \mathrm{Z}(q_{12})\right) = K(q_{12})$$

وهذا يعني أن q_5 تتبع لـ q_{12} ، وكذلك من تبعية q_{12} لـ q_1 فإن كل من q_{13}, q_5, q_4 يتبع لـ q_1 .

ومن أجل الطريق المغلق $(D_0D_1E_1E_0)$ و الموافق للقوس u_{14} ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_{14} - q_{13} - q_7 - q_6 = 0 \qquad (4.27)$$

ومن الشكل $(3-4)$ بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور الترتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_5cos(q_{13}) + l_6cos(q_{13}+q_6) - l_7cos(q_{14}) - c = 0 \\ l_5sin(q_{13}) + l_6sin(q_{13}+q_6) - l_7sin(q_{14}) \qquad = 0 \end{cases} \qquad (4.28)$$

حيث أن $c = |D_0E_0|$.

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_{13}, q_7, q_6 و q_{14} لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد يحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_{13} لذلك يجب حساب $q_6 = q_6(q_{13})$ ، $q_7 = q_7(q_{13})$ و $q_{14} = q_{14}(q_{13})$ ، ثم من تبعية q_{13} لـ q_1 يكون كل ما سبق من إحداثيات تابعاً لـ q_1 ، وذلك على الشكل التالي:

بنسب العلاقتين (4.28) نحصل على :

$$\frac{l_7cos(q_{14})}{l_7sin(q_{14})} = \frac{l_5sin(q_{13}) + l_6sin(q_{13}+q_6)}{l_5cos(q_{13}) + l_6cos(q_{13}+q_6) - c}$$

ومنه نحصل على :

$$q_{14} = \arctan\left(\frac{l_5sin(q_{13}) + l_6sin(q_{13}+q_6)}{l_5cos(q_{13}) + l_6cos(q_{13}+q_6) - c}\right) \qquad (4.29)$$

وهذا يعني أن $q_{14} = g(q_{13}, q_6)$ إذاً لإزالة q_6 يجب علينا حساب q_6 بدلالة q_{13} عندئذ تكون q_{14} تتبع فقط لـ q_{13} .

بتربيع العلاقات (4.28) والجمع طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_5cos(q_{13}) + l_6cos(q_{13}+q_6) - c)^2 = {l_7}^2cos^2(q_{14})$$

$$\left(l_5sin(q_{13}) + l_6sin(q_{13}+q_6)\right)^2 \qquad = {l_7}^2sin^2(q_{14})$$

+ ____

$$\begin{aligned} &{l_5}^2cos^2(q_{13}) + c^2 - 2cl_5cos(q_{13}) + {l_6}^2cos^2(q_{13}+q_6) \\ &+2l_6l_5cos(q_{13}+q_6)cos(q_{13}) - 2l_6c\,cos(q_{13}+q_6) + {l_5}^2sin^2(q_{13}) \\ &+{l_6}^2sin^2(q_{13}+q_6) + 2l_6l_5sin(q_{13})sin(q_{13}+q_6) = {l_7}^2 \end{aligned}$$

ومنه نحصل على :

$$l_7{}^2-\left(l_6{}^2+l_5{}^2+c^2\right)=2l_6l_5\big(cos(q_{13}+q_6)cos(q_{13})+sin(q_{13})sin(q_{13}+q_6)\big)$$
$$-2cl_5cos(q_{13})-2l_6c\ cos(q_{13}+q_6)$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$$l_7{}^2-\left(l_6{}^2+l_5{}^2+c^2\right)=2l_6l_5cos(q_6)\ -2cl_5cos(q_{13})-2l_6c\ cos(q_{13}+q_6)$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_{13} و q_6 من الشكل :

$$L(q_{13},q_6)=0\ \Longrightarrow\ q_6=M(q_{13})$$

وهذا يعني أن q_6 تتبع لـ q_{13}.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_{14}=g(q_{13},q_6)$ نجد أن :

$$q_{14}=g(q_{13},q_6)=g(q_{13},M(q_{13}))=\mathrm{Z}(q_{13})$$

وهذا يعني أن q_{14} تتبع لـ q_{13} ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.27) نجد أن :

$$q_7=q_{14}-q_{13}-q_6=f(q_{13},q_6,q_{14})=f\big(q_{13},M(q_{13}),\mathrm{Z}(q_{13})\big)=K(q_{13})$$

وهذا يعني أن q_7 تتبع لـ q_{13} ، وكذلك من تبعية q_{13} لـ q_1 فإن كل من q_{14},q_7,q_6 يتبع لـ q_1 .

ومن أجل الطريق المغلق (E_0EFF_0) و الموافق للقوس u_{15} ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_{15}-q_{14}-q_9-q_8=0 \qquad (4.30)$$

ومن الشكل $(3-4)$ بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور الترتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_{14}cos(q_{14})+l_8cos(q_{14}+q_8)-l_{15}cos(q_{15})-d=0 \\ l_{14}sin(q_{14})+l_8sin(q_{14}+q_8)-l_{15}sin(q_{15}) \qquad =0 \end{cases} \qquad (4.31)$$

حيث أن $d=|E_0F_0|$ و $l_{14}=|E_0E|$ و $l_{15}=|F_0F|$.

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_{14},q_9,q_8 و q_{15} لكن ليست مستقلة فهناك ثلاث علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد يحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_{14} لذلك يجب حساب $q_8=q_8(q_{14})$ ،

$q_9 = q_9(q_{14})$ و $q_{15} = q_{15}(q_{14})$ ، ثم من تبعية q_{14} لـ q_1 يكون كل ما سبق من إحداثيات تابعاً لـ q_1 ، وذلك على الشكل التالي:

بنسب العلاقتين (4.31) نحصل على :

$$\frac{l_{15}sin(q_{15})}{l_{15}cos(q_{15})} = \frac{l_{14}sin(q_{14}) + l_8 sin(q_{14} + q_8)}{l_{14}cos(q_{14}) + l_8 cos(q_{14} + q_8) - d}$$

ومنه نحصل على :

$$q_{15} = \arctan\left(\frac{l_{14}sin(q_{14}) + l_8 sin(q_{14} + q_8)}{l_{14}cos(q_{14}) + l_8 cos(q_{14} + q_8) - d}\right) \quad (4.32)$$

وهذا يعني أن $q_{15} = g(q_{14}, q_8)$ إذا لإزالة q_8 يجب علينا حساب q_8 بدلالة q_{14} عندئذ تكون q_{15} تتبع فقط لـ q_{14} .

بتربيع العلاقات (4.31) والجمع طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_{14}cos(q_{14}) + l_8 cos(q_{14} + q_8) - d)^2 = {l_{15}}^2 cos^2(q_{15})$$

$$\big(l_{14}sin(q_{14}) + l_8 sin(q_{14} + q_8)\big)^2 \qquad = {l_{15}}^2 sin^2(q_{15})$$

+

$${l_{14}}^2 cos^2(q_{14}) + d^2 - 2dl_{14}cos(q_{14}) + {l_8}^2 cos^2(q_{14} + q_8)$$
$$+2l_8 l_{14} cos(q_{14} + q_8)cos(q_{14}) - 2l_8 d\, cos(q_{14} + q_8) + {l_{14}}^2 sin^2(q_{14})$$
$$+{l_8}^2 sin^2(q_{14} + q_8) + 2l_8 l_{14} sin(q_{14})sin(q_{14} + q_8) = {l_{15}}^2$$

ومنه نحصل على :

$${l_{15}}^2 - \left({l_{14}}^2 + {l_8}^2 + d^2\right) = 2l_8 l_{14}\big(cos(q_{14} + q_8)cos(q_{14}) + sin(q_{14})sin(q_{14} + q_8)\big)$$
$$-2dl_{14}cos(q_{14}) - 2l_8 d\, cos(q_{14} + q_8)$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_{15}}^2 - \left({l_{14}}^2 + {l_8}^2 + d^2\right) = 2l_8\, l_{14}cos(q_8) - 2dl_{14}cos(q_{14}) - 2l_8 d\, cos(q_{14} + q_8)$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_{14} و q_8 من الشكل :

$$L(q_{14}, q_8) = 0 \implies q_8 = M(q_{14})$$

وهذا يعني أن q_8 تتبع لـ q_{14}.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_{15} = g(q_{14}, q_8)$ نجد أن :

$$q_{15} = g(q_{14}, q_8) = g(q_{14}, M(q_{14})) = \mathrm{Z}(q_{14})$$

وهذا يعني أن q_{15} تتبع لـ q_1 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.30) نجد أن :

$$q_9 = q_{15} - q_{14} - q_8 = f(q_{14}, q_8, q_{15}) = f\big(q_{14}, M(q_{14}), \mathrm{Z}(q_{14})\big) = K(q_{14})$$

وهذا يعني أن q_9 تتبع لـ q_{14} ، وكذلك من تبعية q_{14} لـ q_1 فإن كل من q_{15}, q_9, q_8 يتبع لـ q_1 .

ومن أجل الطريق المغلق $(F_0F_1GG_0)$ و الموافق للقوس u_{16} ، فإن العلاقة (4.1) تأخذ الشكل :

$$q_{16} - q_{15} - q_{11} - q_{10} = 0 \qquad (4.33)$$

ومن الشكل (3 − 4) بالإسقاط على محور الفواصل ثم محور الترتيب نجد العلاقات :

$$\begin{cases} l_9cos(q_{15}) + l_{10}cos(q_{15} + q_{10}) - l_{11}cos(q_{16}) - e = 0 \\ l_9sin(q_{15}) + l_{10}sin(q_{15} + q_{10}) - l_{11}sin(q_{16}) \qquad = 0 \end{cases} \qquad (4.34)$$

حيث أن $e = |F_0G_0|$.

نلاحظ أنه لدينا في هذه الطريق أربع إحداثيات معممة هي q_{15}, q_{11}, q_{10} و q_{16} لكن ليست مستقلة فهناك ثلاثة علاقات بين هذه الزوايا وكل علاقة قيد يحذف وسيطاً منها بالتالي لدينا وسيط مستقل وحيد لهذه الطريق وليكن q_{15} لذلك يجب حساب $q_{10} = q_{10}(q_{15})$ ، $q_{11} = q_{11}(q_{15})$ و $q_{16} = q_{16}(q_{15})$ ، ثم من تبعية q_{15} لـ q_1 يكون كل ما سبق من إحداثيات تابعاً لـ q_1 ، وذلك على الشكل التالي:

بنسب العلاقتين (4.31) نحصل على :

$$\frac{l_{11}sin(q_{16})}{l_{11}cos(q_{16})} = \frac{l_9sin(q_{15}) + l_{10}sin(q_{15} + q_{10})}{l_9cos(q_{15}) + l_{10}cos(q_{15} + q_{10}) - e}$$

ومنه نحصل على :

$$q_{16} = \arctan\left(\frac{l_9 sin(q_{15}) + l_{10} sin(q_{15}+q_{10})}{l_9 cos(q_{15}) + l_{10} cos(q_{15}+q_{10}) - e}\right) \quad (4.35)$$

وهذا يعني أن $q_{16} = g(q_{15}, q_{10})$ إذاً لإزالة q_{10} يجب علينا حساب q_{10} بدلالة q_{15} عندئذ تكون q_{16} تتبع فقط لـ q_{15} .

بتربيع العلاقات (4.34) والجمع طرفاً إلى طرف كما يلي نجد:

$$(l_9 cos(q_{15}) + l_{10} cos(q_{15}+q_{10}) - e)^2 = {l_{11}}^2 cos^2(q_{16})$$

$$\left(l_9 sin(q_{15}) + l_{10} sin(q_{15}+q_{10})\right)^2 = {l_{11}}^2 sin^2(q_{16})$$

+

$${l_9}^2 cos^2(q_{15}) + d^2 - 2el_9 cos(q_{15}) + {l_{10}}^2 cos^2(q_{15}+q_{10})$$
$$+2l_{10}l_9 cos(q_{15}+q_{10}) cos(q_{15}) - 2l_{10}e\cos(q_{15}+q_{10}) + {l_9}^2 sin^2(q_{15})$$
$$+{l_{10}}^2 sin^2(q_{15}+q_{10}) + 2l_{10}l_9 \sin(q_{15})\sin(q_{15}+q_{10}) = {l_{11}}^2$$

ومنه نحصل على :

$${l_{11}}^2 - ({l_9}^2 + {l_{10}}^2 + e^2) =$$
$$= 2l_{10}l_9(cos(q_{15}+q_{10}) cos(q_{15}) + \sin(q_{15})\sin(q_{15}+q_{10}))$$
$$-2el_9 cos(q_{15}) - 2l_{10}e\cos(q_{15}+q_{10})$$

ومنه نجد العلاقة التالية:

$${l_{11}}^2 - ({l_9}^2 + {l_{10}}^2 + e^2) = 2l_{10}l_9 cos(q_{10}) - 2el_9 cos(q_{15}) - 2l_{10}e\cos(q_{15}+q_{10})$$

وتبين العلاقة الأخيرة وجود علاقة بين q_{15} و q_{10} من الشكل :

$$L(q_{15}, q_{10}) = 0 \implies q_{10} = M(q_{15})$$

وهذا يعني أن q_{10} تتبع لـ q_{15}.

نعوض هذه العلاقة في العلاقة $q_{16} = g(q_{15}, q_{10})$ نجد أن :

$$q_{16} = g(q_{15}, q_{10}) = g(q_{15}, M(q_{15})) = \mathrm{Z}(q_{15})$$

وهذا يعني أن q_{16} تتبع لـ q_1 ، وكذلك باستخدام العلاقة (4.33) نجد أن :

$$q_{11} = q_{16} - q_{15} - q_{10} = f(q_{15}, q_{10}, q_{16}) = f\big(q_{15}, M(q_{15}), \mathrm{Z}(q_{15})\big) = K(q_{15})$$

وهذا يعني أن q_{11} تتبع لـ q_{15} ، وكذلك من تبعية q_{15} لـ q_1 فإن كل من q_{16}, q_{11}, q_{10} يتبع لـ q_1 .

إذاً استناداً إلى ما سبق فإن $q_i = q_i(q_1); i = 2,3,4,5,6,7, \dots ,16$ ، فالحركة لكامل الآلة تعين من خلال الوسيط q_1 . نلاحظ أن العلاقة (4.7) تأخذ الشكل :

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \\ \Delta z_6 \\ \Delta z_7 \\ \Delta z_8 \\ \Delta z_9 \\ \Delta z_{10} \\ \Delta z_{11} \\ \Delta z_{12} \\ \Delta z_{13} \\ \Delta z_{14} \\ \Delta z_{15} \\ \Delta z_{16} \end{bmatrix} = 0$$

أو:

$$\Delta z_{16} - \Delta z_{15} - \Delta z_{11} - \Delta z_{10} = 0$$

$$\Delta z_{15} - \Delta z_{14} - \Delta z_9 - \Delta z_8 = 0$$

$$\Delta z_{14} - \Delta z_{13} - \Delta z_7 - \Delta z_6 = 0$$

$$\Delta z_{13} - \Delta z_{12} - \Delta z_5 - \Delta z_4 = 0$$

$$\Delta z_{12} - \Delta z_3 - \Delta z_2 - \Delta z_1 = 0$$

المراجع العلمية المستخدمة:

1. Berge C. Graphs (3ed., North-Holland, 1991)(T)(ISBN 0444876030).
2. Christofides , N. Graph Theory: An Algorithmic Approach , Academic Press, New York , London , San Francisco, 1975.
3. J.S. Rao , History of Rotating Machinery Dynamics Second Edition , Springer Science , 2011.
4. J. Michael McCarthy , Gim Song Soh. Geometric Design of Linkages Second Edition , Springer Science , 2011.
5. Jens Wittenburg , Dynamics of Multibody Systems Second Edition , Springer ,2008.
6. L. Lilov , G . Bojadziev , Dynamics and control of manipulative robots ,Sofia ,1997.
7. Mustafa Hasan, Accuracy of the pantograph mechanism with super elastic hinges, Theoretical and Applied Mechanics, PhD, thesis, Sofia ,2006.
8. Reinhard Diestel ,Graph Theory ,Springer- Verlag New York 1997 , 2000.

Abstract of the thesis

The thesis divided into four chapters. The chapters wise of the thesis are given as follows:

Chapter 1 :

This chapter contains three parts :

- Historical introduction about the Mechanics in general ,and 4-bar mechanism and where it used.
- An introduction about the Elastic Mechanics and its importance.
- An introduction about the flexible joint and its importance.

Chapter 2 :

In this chapter , we study the Accurate analysis of planar 4-bar mechanism with elastic , and calculating three matrix $\underline{I}$, $\underline{\theta}$ and $\underline{\psi}$ for the three Model as follows:

- P.M.S generated by one 4-bar mechanism .

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- P.M.S generated by two 4-bar mechanism:

Case one: by using link with double edge joints :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Case two: by using link with one edge joints:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- P.M.S generated by three 4-bar mechanism:

  Case one: by using link with double edge joints :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\underline{\Psi} = \begin{bmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Case two: by using link with one edge joints:

$$
\underline{I} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{\Phi} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chapter 3 :

In this chapter , we discuss an accurate analysis of the relative displacement , the accurate analysis of P.M.S generated by 4-bar mechanism with a complete form , and calculating three matrix $\underline{J}$, $\underline{J}^*$ and $\underline{R} = -\underline{\Psi}^T \left(\underline{J} + \underline{J}^*\right)^T \underline{1}_{n+1}$, calculating the radius vector R_c for the distinctive point c for all of this cases:

- P.M.S generated by one 4-bar mechanism .

$$\underline{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & c_{03} & 0 \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & 0 & -c_{24} \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{J}}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + c_{01} - c_{11} \\ z_1 + z_2 + c_{01} + c_{12} - c_{11} - c_{22} \\ z_3 + c_{03} - c_{33} \end{bmatrix}$$

$$R_c = R_2 + r_3 e_1^{(2)}$$

- P.M.S generated by two 4-bar mechanism:

  Case one: by using link with double edge joints :

$$
\underline{J} = \begin{bmatrix}
c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{08} & c_{09} & c_{0,10} \\
-c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & -c_{38} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & -c_{59} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & 0 & 0 & -c_{7,10}
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{J}^* = \begin{bmatrix}
z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & z_9 & z_{10} \\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
c_{01} - c_{11} + z_1 \\
\sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i}
\end{bmatrix}
$$

$$
R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}
$$

Case two: by using link with one edge joints:

$$\underline{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{07} & c_{08} & c_{09} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & -c_{37} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & -c_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & 0 & 0 & -c_{69} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{J}}^{*} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & z_8 & z_9 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \end{bmatrix}$$

$$R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}$$

- P.M.S generated by three 4-bar mechanism:

  Case one: by using link with double edge joints :

$$
\underline{J} = \begin{bmatrix}
\mathbf{c_{01}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c_{0,12}} & \mathbf{c_{0,13}} & \mathbf{c_{0,14}} & \mathbf{c_{0,15}} & \mathbf{c_{0,16}} \\
-\mathbf{c_{11}} & \mathbf{c_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mathbf{c_{22}} & \mathbf{c_{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathbf{c_{33}} & \mathbf{c_{34}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{3,12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{44}} & \mathbf{c_{45}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{55}} & \mathbf{c_{56}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{5,13}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{66}} & \mathbf{c_{67}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{77}} & \mathbf{c_{78}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{7,14}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{88}} & \mathbf{c_{89}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{99}} & \mathbf{c_{1,10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{9,15}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{10,10}} & \mathbf{c_{10,11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{11,11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{c_{11,16}}
\end{bmatrix}
$$

$$
\underline{J}^{*} = \begin{bmatrix}
z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
c_{01} - c_{11} + z_1 \\
\sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{8} z_i - \sum_{i=1}^{8} c_{ii} + \sum_{i=1}^{8} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{9} z_i - \sum_{i=1}^{9} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} \\
\sum_{i=1}^{10} z_i - \sum_{i=1}^{10} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} + c_{1.10} \\
\sum_{i=1}^{11} z_i - \sum_{i=1}^{11} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} + c_{1.10} + c_{10.11}
\end{bmatrix}
$$

$$
R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}
$$

Case two: by using link with one edge joints:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{0,10} & c_{0,11} & c_{0,12} & c_{0,13} & c_{0,14} \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{3,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{4,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{66} & c_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{6,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{77} & c_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{7,13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{88} & c_{89} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{9,14} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^{*} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{10} & z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} - c_{11} + z_1 \\ \sum_{i=1}^{2} z_i - \sum_{i=1}^{2} c_{ii} + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{3} z_i - \sum_{i=1}^{3} c_{ii} + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=0}^{4} z_i - \sum_{i=1}^{4} c_{ii} + \sum_{i=1}^{4} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{5} z_i - \sum_{i=1}^{5} c_{ii} + \sum_{i=1}^{5} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{6} z_i - \sum_{i=1}^{6} c_{ii} + \sum_{i=1}^{6} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{7} z_i - \sum_{i=1}^{7} c_{ii} + \sum_{i=1}^{7} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{8} z_i - \sum_{i=1}^{8} c_{ii} + \sum_{i=1}^{8} c_{i-1,i} \\ \sum_{i=1}^{9} z_i - \sum_{i=1}^{9} c_{ii} + \sum_{i=1}^{9} c_{i-1,i} \end{bmatrix}
$$

$$
R_c = R_2 + l\, e_1^{(2)}
$$

Chapter 4 :

In this chapter , we focus on calculating the constraint equation for planar system generated by 4-bar mechanism and calculating the number of the sufficient independent variables to describe the movement , and calculating the relation $\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \underline{0}_{\hat{n}\times 1}$ for the follows:

- **P.M.S generated by one 4-bar mechanism .**

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix} = 0$$

Or:

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 - \Delta z_3 + \Delta z_4 = 0$$

- **P.M.S generated by two 4-bar mechanism:**

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \\ \Delta z_6 \\ \Delta z_7 \\ \Delta z_8 \\ \Delta z_9 \\ \Delta z_{10} \end{bmatrix} = 0$$

Or:

$$\Delta z_{10} - \Delta z_9 - \Delta z_7 - \Delta z_6 = 0$$

$$\Delta z_9 - \Delta z_8 - \Delta z_5 - \Delta z_4 = 0$$

$$\Delta z_8 - \Delta z_3 - \Delta z_2 - \Delta z_1 = 0$$

- **P.M.S generated by three 4-bar mechanism:**

$$\underline{\Phi}\ \Delta\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \\ \Delta z_5 \\ \Delta z_6 \\ \Delta z_7 \\ \Delta z_8 \\ \Delta z_9 \\ \Delta z_{10} \\ \Delta z_{11} \\ \Delta z_{12} \\ \Delta z_{13} \\ \Delta z_{14} \\ \Delta z_{15} \\ \Delta z_{16} \end{bmatrix} = 0$$

Or:

$$\Delta z_{16} - \Delta z_{15} - \Delta z_{11} - \Delta z_{10} = 0$$

$$\Delta z_{15} - \Delta z_{14} - \Delta z_9 - \Delta z_8 = 0$$

$$\Delta z_{14} - \Delta z_{13} - \Delta z_7 - \Delta z_6 = 0$$

$$\Delta z_{13} - \Delta z_{12} - \Delta z_5 - \Delta z_4 = 0$$

$$\Delta z_{12} - \Delta z_3 - \Delta z_2 - \Delta z_1 = 0$$

It was obvious that in all cases , there is a single independent variable which is q_1 .

ALBAATH UNIVERSITY

FACULTY OF SCIENCE

MATHEMATICAL DEPARTMENT



Accurate analysis of P.M.S , with super elastic hinges , generated by 4-bar mechanism

submitted to M.Sc. Degree in mathematic

SUBMITTED BY

Mouhand Saleh Al-Aloush

SUPERVISOR

Dr.Mostafa Hassan

1432 - 1433
2011 - 2012